التحسيب العددي باستخدام لغة الماتلاب

Numerical Computation Using Matlab Language

البروفسير

السماني عبد المطلب احمد

استاذ الحاسوب بجامعة النيلين

البروفسير

عوض حاج علي

استاذ الحاسوب بجامعة النيلين

الدكتور

مزمل موسى سعيد

استاذ الحاسوب بجامعة سلمان بن عبد العزيز

الطبعة الأولى

2014م - 1435هـ

دار الجوهرة للنشر والتوزيع

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

﴿ وَقُلِ ٱعْمَلُوا۟ فَسَيَرَى ٱللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُۥ وَٱلْمُؤْمِنُونَ ۖ وَسَتُرَدُّونَ
إِلَىٰ عَٰلِمِ ٱلْغَيْبِ وَٱلشَّهَٰدَةِ فَيُنَبِّئُكُم بِمَا كُنتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صدق الله العظيم

التحسيب العددي باستخدام لغة الماتلاب

دار الجوهرة للنشر والتوزيع

التحسيب العددي باستخدام لغة الماتلاب

السماني عبد المطلب احمد/عوض حاج علي/مزمل موسى سعيد

الواصفات:

2014

جمهورية مصر العربية ـ القاهرة

3عمارات العبور ـشارع صلاح سالم ـمدينة نصر ـالقاهرة

هاتف 2022630431+ فاكس: 2022630432+

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

﴿وَمَنۡ أَحۡسَنُ قَوۡلٗا مِّمَّن دَعَآ إِلَى ٱللَّهِ وَعَمِلَ صَٰلِحٗا
وَقَالَ إِنَّنِي مِنَ ٱلۡمُسۡلِمِينَ ٣٣﴾

صدق اللّٰه العظيم

سورة فصلت الآية: 33

الفهرس

الفصل الثالث

حل منظومة المعادلات الخطية

الفصل الرابع

الاستكمال

الفصل الخامس

التفاضل و التكامل العددي

الفصل السادس

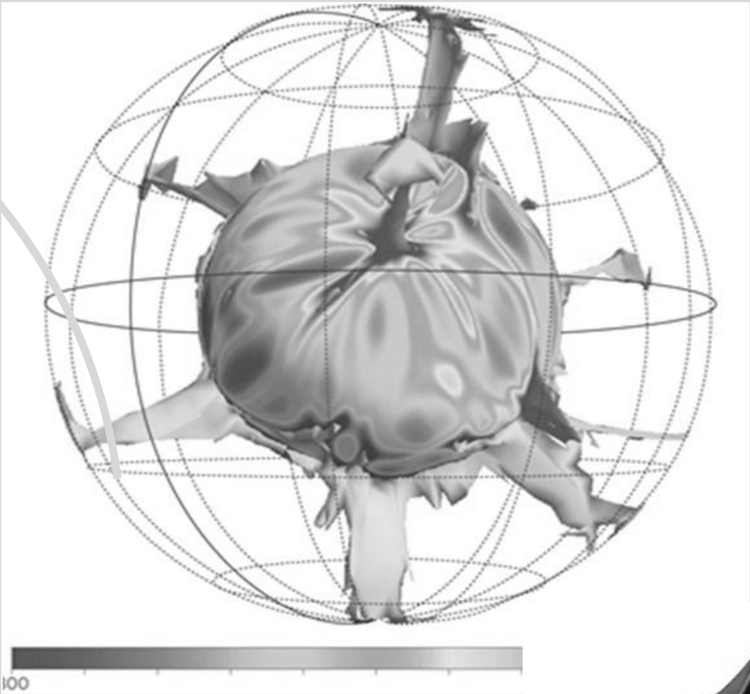
الحل العددي للمعادلات التفاضلية

الفصل السابع

الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية

التحسيب العددي باستخدام لغة الماتلاب

المقدمة



MATLAB
The Language of Technical Computing

المقدمة

نتيجة للتطورات السريعة التي يشهدها العلم هذا اليوم في المجالات العلمية والتكنولوجية كافة فقد احتل موضوع التحسيب العددي موقعاً متقدماً في الأهمية والتطوير إلى جانب المواضيع العلمية المهمة الأخرى لحل المشاكل الحسابية المعقدة التي تتطلب خطوات طويلة وتستغرق من الوقت ما لا يتناسب ومتطلبات عصر السرعة في اختصار الزمن وكفاءة الأداء لإنجاز العمل ، لذلك فقد وجدت طرق التحسيبات العددية طريقها في الحياة العملية ليست كمادة ضرورية فحسب وإنما كفن وتكنيك للتغلب علي كثير من مسائل النمذجة الرياضية المعقدة سواء كان ذلك في التطبيقات الهندسية أو العلمية أو الإدارية ،والتي من الصعوبة بمكان بل ربما من الاستحالة أن يتوصل الباحث إلى نتائج دقيقة في الوقت المحدد باستخدام الطرق الرياضية التقليدية .

إن حاجة الطالب الجامعي العربي الملحة لأن يكون بين يديه كتاب باللغة العربية يعالج طرق التحسيب العددي وبرمجة هذه الطرق بإحدى الحزم البرمجية الرياضية المتخصصة مثل لغة الـ Matlab أو لغة الـ Maple أو غيرها وبمستوي يتناسب مع مقرراته الدراسية كان من العوامل الدافعة لنا لتأليف هذا الكتاب.

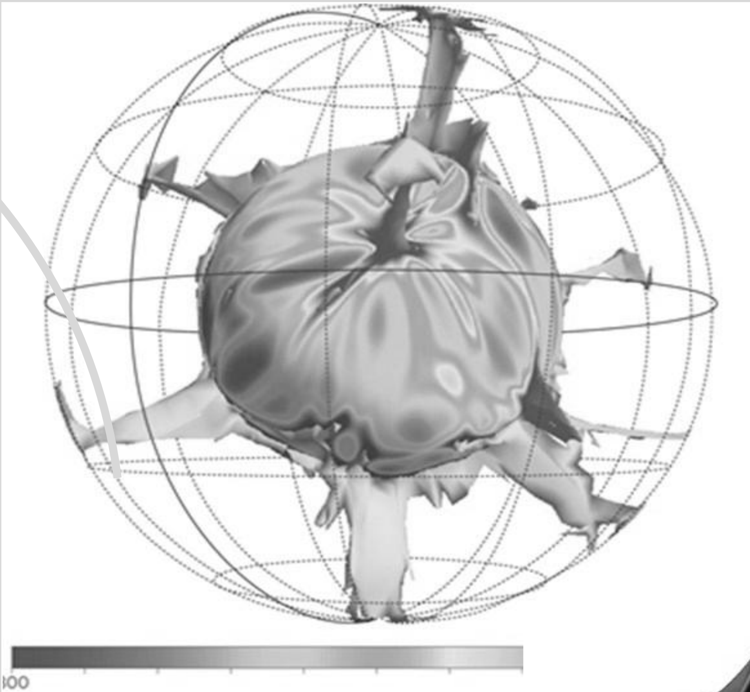
لقد تم تقسيم الكتاب في سبعة فصول تغطي منظومة المعادلات غير الخطية ومنظومة المعادلات الخطية وطرق الاستكمال والمربعات الصغرى والتفاضل والتكامل العددي بالإضافة إلى الحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية.

نأمل أن يكون هذا الجهد إضافة في حركة تعريب العلوم ويسد فراغاً في المكتبة العربية في هذا الفرع من علوم الحاسوب.

الفصل الاول

التحسيب العددي

Numerical Computation



1

التحسيب العددي باستخدام لغة الماتلاب

الفصل الاول

التحسيب العددي Numerical Computation

1-1 ما هو التحسيب العددي ؟

يتعلق موضوع التحسيب العددي باشتقاق ووصف وتحليل طرق الحصول علي حلول عددية لمسائل رياضية يصعب عادة حلها بالطرق التحليلية الجبرية المعتادة. ففي بعض المسائل لا يمكننا إيجاد الحلول الصحيحة (**Exact Solution**) بالطرق التحليلية والنظريات المعتادة، كما نصادف مثلاً عند حل بعض المعادلات الجبرية كالمعادلة:

$$x^9 - 5x^4 + x^2 - 2x + 5 = 0$$

أو عند حل بعض التكاملات المحدودة، مثل التكامل:

$$\int_1^5 \frac{\sin x}{x}.dx$$

أو عند حل بعض المعادلات التفاضلية العادية مع (الشروط الابتدائية) ، أو عند حل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية.........الخ.

ففي مثل هذه المسائل نبحث عن خوارزميات **(Algorithms)** للحل وهي طرق محددة الخطوات للوصول من البيانات المعطاة إلى نتائج أو حلول عددية تعد تقريباً للحلول الصحيحة (أو الحلول العددية) للمسألة قد يكون عدداً واحداً (كقيمة تقريبية لتكامل محدود أو حل معادلة) أو أكثر (كعدة أعداد تمثل جذوراً تقريبية لمعادلة جبرية) أو عدة أعداد تمثل قيم دالة y عند بعض قيم x حيث y هي حل معادلة تفاضلية. وهذه الطرق أو الخوارزميات صمم فكرتها العالم العربي المسلم محمد بن موسى الخوارزمي.

فالتحسيب العددي يتلخص في اشتقاق وتقييم طرق لحساب نتائج عددية مطلوبة من بيانات عددية معطاة، وهذا يجعل التحسيب العددي جزءاً من العلم الحديث الذي يسمي بتشغيل المعلومات **(Information Processing)** حيث البيانات المعطاة **(Given Data)** تمثل المعلومات المدخلة **(Input Information)** والنتائج المطلوبة تمثل المعلومات المخرجة **(Output Information)**. ويلزم التحسيب العددي معرفة طرق الخوارزميات في تصميم الحلول ثم تنفذ هذه الخوارزميات علي الحاسوب.

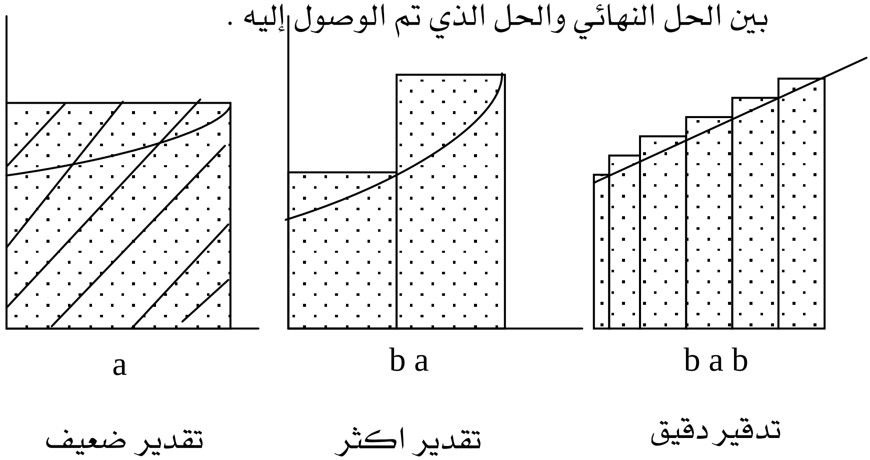
وفي حالة وجود أكثر من خوارزمية لتوليد المعلومات المخرجة المطلوبة " النتائج" فإننا نفاضل بينهما للوصول الي أفضلهما ، ومن أهم العوامل التي تستخدم للمقارنة بين الخوارزميات السرعة والدقة، فالطريقة التي تودي الي الوصول الي النتائج بسرعة أكبر أي تتقارب **(Converges)** الي الحل المطلوب في زمن أقل تفضل علي غيرها وكذلك الطريقة التي تودي الي نتائج أدق " أي يكون الخطأ فيها أقل " تفضل علي غيرها وعموماً توجد هنالك عدة أخطاء تودي الي أخطاء في النتيجة، هناك عوامل أخري جانبية تتفاوت في أهميتها في مقارنة الخوارزميات مثل حجم الذاكرة والسعة التخزينية ووضوح وشمولية الخوارزمية نتناول في هذا الجزء هذه الأخطاء.

2-1 مصادر الأخطاء في حل المسائل الرياضية بالحاسوب :

أ] النموذج الرياضي: عند تصميم النموذج الرياضي لوصف ظاهرة معينة تكون هناك عادة بعض التبسيطات والحذو فات التي ربما تؤدي إلى عدم دقة الحل النهائي مثال ذلك استبدال $\sin x$ بـ x عندما تكون x صغيرة أو اعتبار أن $\frac{c}{x^n}$ عندما تكون $x>1$ و n كبيرة جداً .

ب] البيانات : هناك أخطاء متوقعة في عدم دقة قياس أو تقدير القيم مثلاً عند تقدير الدرجة التي يستحقها الطالب في مقال في مادة التاريخ أو تقدير الطبيب لعمر شخص معين أو تقدير متوسط ذكاء الطالب أو قياس الزاوية والزمن في حركة البندول .

جـ] الخوارزمية العددية : إن الخوارزميات العددية هي في الواقع مبنية على تقديرات الحل وليس على الحل النهائي فمثلاً حساب التكامل بالخوارزمية العددية تحت المنحنى بمساحة مستطيل أو شبه منحرف وتزيد دقة التقدير كلما قسمنا المساحة إلى مستطيلات أو شبه منحرفات صغيرة كما في الرسم . كذلك المتواليات اللانهائية يتم تقديرها بالطبع بمتوالية محدودة العدد ويتم تحديد ذلك العدد حسب الدقة المطلوبة ومثل ذلك الوصول إلى قمة الدالة وإلى نقطة قطع الدالة للمحور السيني فأن ذلك يتم بالاتجاه نحو الحل بخطوات متكررة يقف تكرارها بعد الوصول إلى دقة معقولة ومقبولة ولكن يظل هناك خطأ بين الحل النهائي والحل الذي تم الوصول إليه .



د] **تمثيل الأعداد الحقيقية** : كما ذكرنا أن بعض كسور الأعداد الحقيقية هي كسور ممتدة مثل $\frac{1}{3}$ أو π أو $\sqrt{2}$ التي لا نهاية لامتداد كسرها وحتى الأعداد الحقيقية العددية التي يزيد كسرها على حد معين أو الحد المتاح في تمثيل الكسور في الحاسوب فإن الحاسوب سيلجأ إلى التقريب أو الكشط وما تم تقريبه أو كشطه هو في الواقع إضعاف لدقة الحل .

هـ] **أخطاء العمليات الحسابية** : إنه كلما كثرت عملية الجمع والطرح كلما زاد أثر التقريب في زيادة عدم الدقة في الناتج وهذه الزيادة ربما تتكاثر مع زيادة العمليات الحسابية وتؤدي إلى أضعاف الحل أو الانحراف به بعيداً من الجواب الصحيح .

تحديد أخطاء التقريب :

هناك طريقتان لتحديد أخطاء التقريب . الطريقة الأولى هي تحديد الخطأ المطلق ونعني بالخطأ المطلق هو القيمة الموجبة للفرق بين العدد الحقيقي و العدد المقرب و كما هو معروف أن خطأ التقريب دائماً أقل من 0.5×10^{-n} و n هي عدد الخانات العشرية الصحيحة أو التي هي متاحة لتمثيل العدد الحقيقي في الحاسوب . ولما كان الخطأ المطلق لا يعطي صورة دقيقة عن أثر الخطأ التقريبي على دقة الحل كان لابد من عمل طريقة أخرى تعطي معلومات أكثر فائدة وهي الطريقة الثانية التي تحدد الخطأ النسبي بقسمة الخطأ المطلق على العدد الحقيقي والخطأ النسبي أقل من 5×10^{-n} لأن الخطأ المطلق كما ذكرنا هو 0.5×10^{-n} وأن أصغر تمثيل طبيعي لجزء الكسر هو 0.1 و عليه يكون أي خطأ نسبي أقل من $\frac{0.5\times10^{-n}}{0.1}=5\times10^{-n}$ ويمكن أن يقدر الخطأ النسبي بقسمة الخطأ المطلق على العدد المقرب بدلاً من العدد الحقيقي .

مثال : نفترض أن x هي العدد الحقيقي و x^* هو العدد المقرب بالحاسوب لـ8 خانة عشرية فإنه :

الحد المطلق = $\left|x-x^*\right|<0.5\times10^{-8}$

الخطأ النسبي = $\frac{\left|x-x^*\right|}{|x|}<5\times10^{-8}$

أخطاء العمليات الحسابية :

نتيجة لأخطاء تمثيل الأعداد الحقيقية فإنه بعد عملية الجمع والطرح وبعد عملية الضرب والقسمة بين عددين يكون هناك خطأ في النتيجة يمكن أن يحدد بمجموع خطأ تمثيل العدد الأول زائداً خطأ تمثيل العدد الثاني . أي إذا كان العددان هما x و y فإن الخطأ المطلق الناتج عن جمع أو طرح x و y هو جمع الخطأ المطلق في تمثيل x زائداً الخطأ المطلق في تمثيل y أما بالنسبة للضرب والقسمة فإن الخطأ النسبي للضرب والقسمة هو محدد بناتج جمع الخطأ النسبي في تمثيل x زائداً الخطأ النسبي في تمثيل y .

3-1 العمليات الحسابية بتقويم الخانة العشرية (Floating Arithmaties)

كل العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية يتم في الحاسوب بطريقة تسمى تقويم الخانة العشرية . وهذا ناتج من طريقة تمثيل الأعداد الحقيقية في الحاسوب فقد ذكرنا أن العدد الحقيقي يمثل في الحاسوب على جزئيين الجزء الكسري وجزء القوى فمثلاً 3 لا تمثل بـ 3 ، بل تمثل بـ 0.3×10^1 و 0.3 تمثل بـ0.3×10^0 و 0.03 تمثل بـ 0.3×10^{-1} (هذا التمثيل يسمى التمثيل المطبع وهو الذي لا يقبل بأن تكون الخانة العشرية المجاورة لعلامة الخانة العشرية صفراً أو بلغة أخرى أن الخانة التي في أقصى اليسار يجب ألا تكون صفراً) . فعندما يقوم الحاسوب بعمل عمليات جمع أو طرح فإنه أول ما يقوم به هو توحيد القوى في العددين المراد جمعهما أو طرحهما وبناء على ذلك يتم تحريك الخانة العشرية إلى

اليسار وإضافة أصفاراً في العدد الأصغر حتى تصير له نفس القوة التي في العدد الأكبر ثم تتم عملية الجمع والطرح ثم تطبع النتيجة مرة أخرى بإزالة الأصفار التي في يمين الخانة العشرية وتقليص القوة بناء على ذلك وبعدد الخانات الصفرية التي تمت إزالتها .

مثال :

$$3+0.3+0.03$$

$$0.03 = 0.3\times 10^{-1} = 0.003\times 10^{1}$$

$$0.3 = 0.3\times 10^{0} = 0.030\times 10^{1}$$

$$3 = 0.3\times 10^{1} = \underline{0.300\times 10^{1}}$$

$$= 0.333\times 10^{1}$$

مثال :

$$30000000+0.0003$$

$$3000000 = 0.3000000\times 10^{7}$$

$$0.0003 = 0.00000000003\times 10^{7}$$

$$0.300000000003\times 10^{7}$$

هذه العملية سوف تعطي قيمة العدد الأول=0 أي كأن الـ 0.0003 صفراً إذا كان عدد خانات الحاسوب المتاحة أقل من 11 خانة وهذا من أخطر مشاكل الحاسوب وهي التعامل مع الأعداد الصغيرة نسبياً مقارنة بأعداد كبيرة مجموعة معها كأنها صفر وشتان بين الصفر و 0.0003 لذلك تسعى خوارزميات التحسيب العددي تجنب هذه الحالات أي حالات جمع أو طرح أعداد صغيرة مع أعداد كبيرة نسبياً .

هـذه المشـكلة غير موجودة في حالـة الضـرب والقسـمة لأنـه لا حاجـة هنـاك لتحريـك الخانـة العشـرية مقابـل توحيـد القـوى . فيـتم فقـط طـرح القـوى في حالـة القسمة وجمع القوى .

في حالة الضرب مثلاً :

$$-273 \times 0.00364$$
$$0.273 \times 10^{3} \times 0.364 \times 10^{-3}$$
$$= -99372 \times 10^{0} = 0.99372 \times 10^{-3}$$

هذه العمليات في غاية البساطة هي أولاً جمع القوى ثم عمل عملية الضـرب بـين رقمـي الجـزء الكسـري في العـددين (بـالطبع الجمـع في الحاسـوب هـو عمليـة جمع متكررة مثلاً في هذا المثال الضرب عبارة عن جمع 364 مع بعض (273 مرة) ثم تحريك الخانة العشرية بمجموع الخانات العشرية في الكسرين وبعد ذلك إذا كـان هنـاك أرقـام في يسـار الخانـة العشـرية تحـرك الخانـة العشـرية نحـو اليسـار وتزيـد القـوى بعـدد حركـة الخانـة العشـرية أمـا إذا كـان هنـاك أصـفاراً في يمـين الخانة العشرية فإن الخانة العشرية تحرك نحو اليمين من أجل التطبيع ويتم على ضوء ذلك تقليص القوى بنفس العدد الذي تم به تحريك الخانة العشرية .

أما عملية القسمة فهي عكس عملية الضرب حيث يتم أولاً طرح القـوى أي طرح قوة المقسـوم مـن القاسـم ثـم يقـوم الحاسـوب لقسـمة رقمـي الجـزء الكسـري للعـددين وتعـديل القـوى بعـد ذلـك لتطبـع التمثيـل إلى إزاحـة الأصـفار الناتجـة مـن القسمة إن وجدت مثلاً :

$$54.3 \div 455 = 0.543 \times 210 \div 0.445 \times 310$$
$$= (0.543 \times 0.445) \times 10^{1}$$
$$= 1193400 \times 10^{-1} = 0.11934 \times 10^{0}$$

مثال آخر:

$$-275 \div 0.00987 = -0.275 \times 10^{3} \div 0.987 \times 10^{-2}$$
$$= (-0.275 \div 0.987) \times 10^{4}$$
$$= -0.278622 \times 10^{4}$$

ملحوظة :

1] **جمع وطرح أعداد صغيرة مع أعداد كبيرة نسبياً (نسبة للعدد الصغير) لا يؤثر على الأعداد الكبيرة أي أن نتيجة الجمع أو الطرح هي نفس العدد الكبير.**

مثال : نفترض أن دقة الحاسوب 7 خانة عشرية .

$$322.55 + 0.0005 = 0.32255 \times 10^{3} + 0.5 \times 10^{-4}$$
$$= 0.32255 \times 10^{3} + 0.00000005 \times 10^{-7}$$ (توحيد القوة)
$$= 0.32255005 \times 10^{3}$$
$$= 0.3225500 \times 10^{3}$$ لأن دقة الحاسوب 7 خانات

إذن إضافة 0.0005 إلى 322.55 ليس له أثر في حاسوب دقته 7 خانة عشرية.

ذكرنا أن هذه المشكلة من أخطر مشاكل الحاسوب في التحسيب العددي خاصة حل المسائل الهندسية والعلمية الدقيقة وهي من القضايا الهامة التي يجب التحايل عليها في تصميم الخوارزميات العددية .

2] عادة تكون نتيجة مقلوب العدد مضروب في العدد لا تساوي واحداً من الأعداد الصغيرة أي أن الحاسوب لا يجد مقلوباً لهذه الأعداد إذا تجاوزت حداً معيناً في الصغر لا يناسب دقة الحاسوب مثلاً في حاسوب دقته 7 خانات عشرية . فإن مقلوب 3 يساوي:

0.3333333×10^0 ومن ثم $0.3 \times 10^1 \times 0.333333 \times 10^0$

$= 0.9999999 \times 10^0$ لا يساوي واحداً بالدقة أعلاه.

3] ترتيب عملية الجمع قد يؤدي إلى نتيجة مختلفة أي إذا أردنا جمع x وy و z وجمعنا أولاً x و y ثم أضفنا لها z فليس بالضرورة أن يساوي ذلك إذا جمعنا y وz أولاً ثم أضفنا لهم x .

مثال لحاسوب دقته 3 خانات عشرية .

$$x = 63.1 \qquad y = 4.24 \qquad z = 0.247$$

$$x + y = 0.631\times10^2 + 0.242\times10$$

$$= 0.631\times10^2 + 0.00424\times10^2$$ (توحيد القوة)

$$= 0.6734\times10^2$$

$$= 0.673\times10^2$$

$$(x + y) + z = 0.673\times10^2 + 0.247\times10^5$$

$$= 0.673\times10^2 + 0.00247\times10^2$$

$$= 0.67547\times10^2$$

$$= 675\times10^2$$ (التقريب لـ 4 خانات)

أما إذا جمعنا y و z أولاً ثم أضفنا لها x فسنجد :

$$y + x = 4.24 + 0.247$$

$$= 0.424\times10^1 + 0.247\times10^0$$

$$= 0.424\times10^1 + 0.0247\times10^1$$

$$= 0.4487\times10^1$$ (التقريب لـ 4 خانات)

$$
\begin{aligned}
(y+z)+x &= 0.449\times10^{1}+63.1 \\
&= 0.449\times10^{1}+631\times10^{2} \\
&= 0.0449\times10^{2}+631\times10^{2} \\
&= 0.676\times10^{2}
\end{aligned}
$$

إن النتيجة الحقيقية الدقيقة لهذا الجمع هو 0.67587×10^{0} ومن هذا يتضح أن الترتيب الثاني هو أكثر دقة لماذا ؟ لأنه تم جمع الأعداد الأصغر مع بعضها البعض ثم تم إضافتها للأكبر وبهذا تجنب جمع أعداد صغيرة مع أعداد كبيرة وهذه هي القاعدة التي يراعيها مصممو الخوارزميات العددية أي توجيه الخوارزمية لجمع الأعداد تصاعدياً أي جمع الأصغر ليصبح الناتج أكبر ثم جمع هذا الناتج مع العدد الأكبر ليخرج ناتج أكبر ثم جمع هذا الناتج الأكبر مع العدد الأكبر . وهكذا .

4-1 أخطاء تقريب الدوال والحلول :

إن كل الحلول التي يتم الوصول إليها بالحاسوب أو بواسطة الخوارزميات العددية هي في الواقع حلول تقريبية أو قل تقديرية فإضافة إلى مشاكل تمثيل الأعداد وأخطاء العمليات الحسابية التي شرحناها هناك مشكلة مدى الاقتراب من الحل الصحيح فعادة ما تؤدي الخوارزمية إلى الاقتراب من الحل اقتراباً متزايداً مع زمن الحاسوب حتى يقرر المستخدم للخوارزمية أنه تقبل الحل بهذا الاقتراب أو التقدير للحل وعادة يعرف تقبل الفرق بين الحل الدقيق بالخطأ المقبول أو المسموح أو السماح **(Tolerance)** ويعطي الرمز **(tol)** وأحياناً يعطي الرمز **(EPS)** وهو اختصار لابسلون أي حرف **E** باللاتينية لتعني الخطأ **(Error)** .

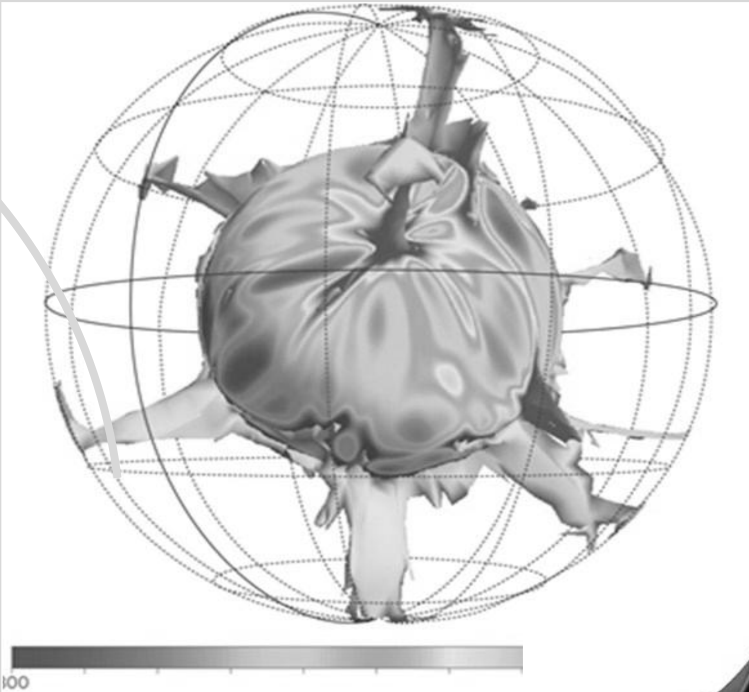
خير أمثله لهذه الظاهرة أمثلة أخطاء تمثيل الدوال بالمتواليات (أخطاء الكشط) على سبيل المثال نجد تقدير الحل أو ظاهرة الاقتراب من الحل التي

ذكرناها واضحة عند حساب المتواليات اللانهائية إذ أنه لابد للحاسوب أن يقف في حد معين عند حساب المتوالية فلا يمكن أن يحسب إلى ما لانهاية حدود المتوالية وهذا ما يعرف بالكشط و خطأ الكشط **(Truncation Error)** . أما متى يقف ؟ فهذا مرتبط بالدقة التي يريدها المستخدم فإذا كان بعد 1000 حد من حدود المتوالية وصلنا إلى دقة في الحل تصل إلى 0.00005 من الحل ، ويريد المستخدم دقة تتطابق مع الحل الصحيح إلى ستة خانات عشرية فإن الحاسوب يستمر في إضافة حدود أخرى حتى يصل إلى الدقة المطلوبة ، أما أمثلة الأخطاء الأخرى الناتجة عن حلول الخوارزميات وغيرها سوف نتطرق لها في حينها.

الفصل الثاني

حل المعادلات غير الخطية

The Solution Of Nonlinear Equations



2

التحسيب العددي باستخدام لغة الماتلاب

الفصل الثاني

حل المعادلات غير الخطية

The Solution Of Nonlinear Equations

1-2 جذور المعادلات Roots Of Equation:

يقال أن العدد "a" جذراً للمعادلة $f(x)=0$ أو صفر (zero) للدالة f إذا كان $f(a)=0$ إلا أنه في التطبيقات العددية لا يمكن عادة تحقيق المعادلة بالضبط Exactly بسبب أخطاء التقريب لذلك فيعدل تعريف الجذر ليصبح كما يلي:

يقال أن العدد "a" جذراً للمعادلة $f(x)=0$ إذا كان $|f(a)|<\varepsilon$ حيث ε تمثل الخطأ الذي سمح به المستخدم في الحل النهائي لسبب أخطاء التقريب أو الخوارزمية أو غيرها وتعرف بالسماح المعطي

(Given Tolerance)، والطرق المعروفة التي تستخدم صيغاً مباشرة تودي إلى حل المعادلة حلاً صحيحاً هي طرق لا تطبق عادة إلا علي عدد محدود جداً من المعادلات تعتبر حالات خاصة (كمعادلات الدرجة الثانية والدرجة الثالثة مثلاً).

نبدأ في هذا الجزء بعض الطرق العددية والتي تسمي الطرق التكرارية (Iterative Methods) لحل المعادلات وهي من الطرق التي لها مجال واسع من التطبيقات.

2-2 الطرق التكرارية Iterative Methods:

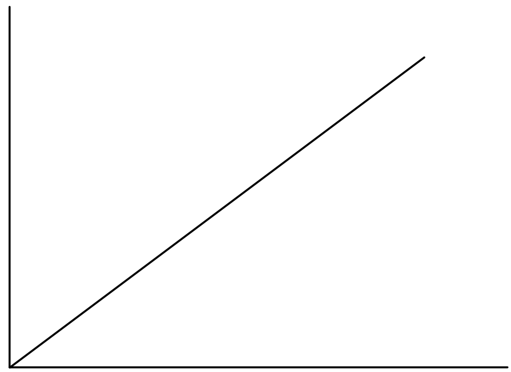
وهي طرق تودي عادة إلى إيجاد جذور قريبة جداً من الجذور الصحيحة ، وهذه الطرق التكرارية تفترض معرفة قيمة تقريبية ابتدائية x_0 لجذر الصحيح

ε للمعادلة ثم يكرر استخدام (تطبيق) صيغة الطريقة التكرارية عدة مرات للحصول علي قيم متتابعة اقرب إلى الجذر الصحيح إلي أن نصل إلى قيمة مقبولة.

فلإيجاد جذر للمعادلة $f(x)=0$ (حيث f دالة جبرية) بالطرق التكرارية نبدأ بقيمة تقريبية ابتدائية x_0 ثم نوجد تقريبات متتالية أفضل ، وإذا مثلنا الدالة $y=f(x)$ بيانياً فيمكن صياغة المسالة علي أننا نبحث عن تقاطع المنحني مع محور x . والفكرة الأساسية في الطرق التالية هو أن نستبدل بالمنحني خطاً مستقيماً مناسباً يسهل حساب نقطة تقاطعه مع محور x هذا الخط المستقيم يمر بالنقطة (x_n, y_n) والتي تمثل آخر تقريب وصلنا إليه.

3-2 **طريقة نيوتن رافسون** Newton-Raphson Method

وتعرف هذه الطريقة أيضا باسم طريقة نيوتن ، ولحل معادلة بهذه الطريقة نضع المعادلة أولاً في الصورة $f(x)=0$ ، ونوجد قيمة تقريبية ابتدائية x_0 بالقرب من الجذر الصحيح ε (كأن نوجد مثلاً قيمتين $x=a, x=b$ تتغير إشارة الدالة f عندهما من موجب إلى سالب أو العكس، وبفرض أن الدالة f متصلة فيكون الجذر ε واقعاً بين $x=a, x=b$ ولذلك نختار x_0 أي نقطة في المنطقة [a,b]) ثم نوجد التقريبات المتتالية $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ وهي من أكثر الطرق استخداماً لحل المعادلات غير الخطية .



$$f'(x_0) = \tan\theta = \frac{f(x_0)}{\Delta} \qquad \therefore \Delta = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \Delta = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

وعموماً فإن

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0,1,2,3,............$$

مثال:

أوجد بطريقة نيوتن جذراً للمعادلة $x^2 - x - 10$ بالقرب من $x = 2$

الحل

نضع المعادلة في الصورة

$$f(x) = x^2 - x - 10 = 0$$

لاحظ أن:

$$f(0) = -10 < 0$$
$$f(1) = -10 < 0$$
$$f(2) = 4 > 0$$

أي أن المعادلة لها جذر بين $x = 2$ و $x = 1$ نأخذ القيمة الابتدائية $x = 2.0$ ولإيجاد صيغة نيوتن لهذه الدالة

$$f(x) = x^4 - x - 10$$
$$f'(x) = 4x^3 - 1$$
$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$= x_n - \frac{x_n^4 - x_n - 10}{4x_n^3 - 1} \qquad n = 0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots f(x) = x^4 - x - 10$$
$$f'(x) = 4x^3 - 1$$
$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$= x_n - \frac{x_n^4 - x_n - 10}{4x_n^3 - 1} \qquad n = 0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots$$

وبتطبيق هذه الصيغة عدة مرات متتالية نحصل علي القيم التالية:

$$x_1 = 1.871$$
$$x_2 = 1.85578$$
$$x_3 = 1.855585$$
$$x_4 = 1.85558452522$$

نلاحظ أن القيمة المطلقة للفارق بين قيمتين متتاليتين $|x_n - x_{n-1}|$ أصبح أصغر من 0.5×10^{-4} عند $n = 4$ لأن $|x_4 - x_3| = 0.00000047478$ ولذلك نتوقف عن تطبيق الصيغة التكراري

ملحوظة:

في الحالات التي تكون فيها الدالة f كثيرة حدود فإنه يمكن استخدام طريقة هورنر لحساب قيمة كل من $f(\chi_n), f'(\chi_n)$ الموجودتين في صيغة نيوتن- وذلك للحصول علي النتائج بسرعة أكبر كما في النحو التالي:

4-2 **طريقة هورنر** Herner's Scheme

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد قيمة كثيرة حدود p أو مشتقتها p′ عند نقطة معينة، كما نستخدم لإزالة (removal) الجذور من المعادلات الجبرية، وتعرف أيضاً بطريقة القسمة التركيبية **(synthetic division)**

1-4-2 **حساب قيمة كثيرة الحدود** Evaluating A polynomial

نفرض أن

$$p(z) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

لإيجاد قيمة p عند نقطة مثل $x = z$ يمكننا بتعويض قيمة x أن نكتب

$$p(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$$
$$= (a_0 z^2 + a_1 z + a) z + a_3$$

$$= (a_0 z + a_1) z + a_1) z + a_3$$

وهذه الصيغ الأخيرة لقيمة الحدودية $p(z)$ هي أساس خوارزمية طريقة هورنر لحساب هذه القيمة ويمكن حساب هذه الصيغة الأخيرة بالطريقة التالية:

$$\begin{array}{lllll} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \downarrow z \\ & a_0 z & (a_0 z + a_1)z & ((a_0 z + a_1)z + a_2)z & \\ \hline a_0 & a_0 z + a_1 & (a_0 z + a_1)z + a_2 & ((a_0 z + a_1)z + a_2)z + a_3 & \end{array}$$

حيث تكتب المعاملات $a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0$ في السطر الأول ونحصل عل أي حد في السطر الثاني بضرب الحد السابق في السطر الثالث في z ، بينما نحصل علي أي حد في السطر الثالث بجمع الحدين المقابلين له في السطرين الأول والثاني وتكون القيمة $p(z)$ هي آخر قيمة نحصل عليها في السطر الثالث، ويمكن كتابة ما سبق في الصورة المختصرة التالية:

$$\begin{array}{lllll} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \downarrow z \\ & b_0 z & b_1 z & b_2 z & \\ \hline b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & p(z) = b_3 \end{array}$$

حيث

$$b_0 = a_0$$

$$b_i = a_i + b_{i-1}.z \qquad i = 1,2,3,........$$

2-4-2 خوارزمية طريقة هورنر لحساب قيمة كثيرة حدود

Horner'S Algorithm for Evaluating A polynomial

نفرض أن p كثيرة حدود من الدرجة n وصيغتها

$$p(z) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

لإيجاد قيمة p عند نقطة z اتبع الخوارزمية الآتية:

$$b_0 = a_0$$

$$b_i = a_i + b_{i-1}.z \qquad i = 1,2,3,......,n$$

$$p(z) = b_n$$

مثال:

نفرض أن $p(x)=2x^3+x+7$ طبق طريقة هورنر لإيجاد قيمة $p(8)$

2	0	1	7	$\downarrow 8$
	16	128	1032	
2	16	129	1039	

أي أن $p(8)=1039$ ويمكن التحقق من هذه النتيجة بالتعويض المباشر

$$p(8)=2\times(8^3)+8+7=1039$$

3-4-2 حساب قيمة مشتقة كثيرة حدود

Evaluating The derivative Of Polynomial

يمكن استخدام طريقة هورنر لإيجاد قيمة مشتقة كثيرة حدود عن نقطة معينة ، وذلك بتطبيق النظرية التالية:

نظرية:

نفرض أن

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots\dots+a_{n-1}x+a_n$$

$$b_0=a_0$$

$$b_i=a_i+b_{i-1}.z \qquad i=1,2,3,\dots\dots$$

$$c_0=b_0$$

$$c_i=b_i+c_{i-1}.z \qquad i=1,2,3,\dots\dots$$

يمكن حساب قيمة مشتقة كثيرة الحدود p عند النقطة $x=z$ بالعلاقة

❖❖ $p'(z)=c_{n-1}$

مثال:

نفرض أن

$$p(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x - 4$$

أوجد بطريقة هورنر كلاً من $p(2), p'(2)$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -3 & 4 & 2 & -10 & -4 \downarrow 2 \\ & 2 & -2 & 4 & 12 & 4 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 6 & 2 & \underline{\underline{0}} \downarrow 2 \\ & 2 & 2 & 8 & 28 & \\ \hline 1 & 1 & 4 & 14 & \underline{\underline{30}} & \end{array}$$

التحقق

$$p'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 4x - 10$$
$$p'(x) = 80 - 96 + 48 + 8 - 10 = \underline{\underline{30}}$$

كما ذكرنا سابقاً تستخدم طريقة هورنر لحساب قيمة $f(x_n), f'(x_n)$ الموجودتين في طريقة نيوتن رافسون وذلك للحصول علي النتائج بسرعة أكبر كم يتضح من المثال التالي:

مثال:

أوجد لثلاثة أرقام عشرية – بطريقة نيوتن – الجذر الحقيقي للمعادلة :

$$p(x) = x^3 - x - 1 = 0$$

مبتدئ بالتقريب الابتدائي $x_0 = 1.3$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 1.3 - \frac{p(1.3)}{p'(1.3)}$$

نستخدم طريقة هورنر لحساب $p(x_n), p'(x_n)$

$$\begin{array}{ccccl} 1 & 0 & -1 & -1 & \downarrow 1.3 \\ & 1.3 & 1.69 & 0.897 & \\ \hline 1 & 1.3 & 0.69 & \underline{\underline{-0.103}} & \\ & 1.3 & 3.38 & & \\ \hline 1 & 2.6 & \underline{\underline{4.07}} & & \end{array}$$

$$\therefore\ p(1.3) = -0.103 \qquad p'(1.3) = 4.07$$

$$\therefore\ x_1 = 1.3 + \frac{0.103}{4.07} = 1.3 + 0.0253071 \equiv 1.325$$

ونطبق صيغة نيوتن مرة أخري لنصل إلى الدقة المطلوبة

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = 1.325 - \frac{p(1.325)}{p'(1.325)}$$

ومرة أخرى نستخدم طريقة هورنر لنتحصل هذه المرة علي قيمة كل من $p(1.325), p'(1.325)$

1	0	−1	−1	↓1.325
	1.325	1.755625	1.001203	
1	1.325	0.755625	0.001203	
	1.325	3.511250		
1	2.65	4.266875		

$\therefore\ p(1.324) = 0.001203 \qquad p'(1.325) = 4.266875$

$$\therefore\ x_2 = 1.325 - \frac{0.001203}{4.266875} = 1.325 - 0.000281939 \equiv 1.324718061$$

تستخدم طريقة نيوتن بكثرة في الحاسبات الآلية لحساب قيمة العديد من الدوال البسيطة مثل

$$\sqrt{x} \quad , \quad \sqrt[3]{x} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{x}}$$

مسائل:

1) استخدم طريقة نيوتن رافسون لإيجاد جذور المعادلة

$f(x) = x^2 - x + 2$

خذ $x_0 = -1.5$ واجد x_1, x_2, x_3

2) أوجد بطريقة نيوتن – رافسون لإيجاد جذور المعادلة

$f(x) = x^3 - 3x - 2$

خذ $x_0 = 2.1$ واجد x_1, x_2, x_3, x_4

أوجد بطريقة نيوتن أصغر جذر للمعادلة

$e^{-x} = \sin x$

وذلك لثلاثة ارقام عشرية

أوجد لستة أرقام عشرية جذر للمعادلة $x = 0.2\sin x + 0.5$ بطريقة نيوتن رافسون

4) استخدم طريقة نيوتن رافسون لإيجاد جذور للمعادلة $x = e^{-x}$ بالقرب من x=0.5 . كم عدد المرات التكرارية المطلوبة للحصول علي :

(أ) دقة لموضعين اثنين (2 place accuracy)

(ب) دقة لستة مواضع (6place accuracy).

5-2 **طريقة التنصيف** Bisection Method

نفرض أننا أعطينا دالة متصلة مُعَرَّفة في الفترة $[a,b]$ ونفرض أن $f(a), f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة **The Mean value Theorem** توجد قيمة p حيث $a < p < b$ بحيث أن $f(p) = 0$ والمطلوب إيجاد قيمة هذا الجذر p .

علي الرغم من أن طريقة التنصيف لإيجاد الجذر p تصلح للتطبيق في حالة ما إذا كان هنالك اكثر من جذر في الفترة $[a,b]$ سنفترض للتبسيط أنه يوجد جذر وحيد في هذه الفترة، تحتوي طريقة التنصيف علي التنصيف المتكرر للفترات الجزئية من الفترات $[a,b]$ وفي كل خطوة تعيين النصف الذي يحتوي علي الجذر p .

في البداية نضع $a = a_1, b = b_1$ ونفرض أن p_1 هي النقطة المتوسطة في الفترة $[a,b]$ أي أن:

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

فإذا كانت $f(p_1)$ فإن $p = p_1$ وإلا فإن إشارة $f(p_1)$ هي نفس إشارة إما $f(a_1)$ أو $f(b_1)$ ، فإن كان $f(p_1), f(a_1)$ لها نفس الإشارة فإن $p \in (a_1, b_1)$ ، وحينئذ نضع:

$a_2 = p_1 \qquad b_2 = b_1$

وأما إذا كانت إشارة $f(p_1)$ هي نفس إشارة $f(b_1)$ فإن $p \in (a_1, b_1)$ وحينئذ نضع:

$a_2 = a_1 \qquad b_2 = p_1$

ثم نعيد تطبيق هذه العملية علي الفترة $[a_2, b_2]$.

الخوارزمية:

Bisection Method Algorithm

To find a solution to $f(x) = 0$ given continuous function f on the interval[a, b] where $f(a)$ and $f(b)$ have opposite signs.

Input: end point a,b; tolerance tol; maximum number of iterations; No.

Output: approximate solution p or message of failure.

Step1: set $i = 1$

Step2: while $i < No$ do step 3-6

Step3: set $p = a + \frac{b-a}{2}$ (compute p_i)

Step4: if $f(p) = 0$ or $\frac{b-a}{2} < tol$ then output p (procedure completed successfully)

Stop.

Step5: set $i = i + 1$

Step6: if $f(a) \times f(b) > 0$ set a=p (compute a_i, b_i) else set $b = p$

Step7: output (method failed after No iterations, No= ‘,No);

(procedure complete unsuccessfully).

Stop.

ملحوظة:

يوجد اكثر من شرط يمكن أن يستخدم لإيقاف تنفيذ الطريقة بدلاً من الشرط $f(p)=0$ أو $\frac{b-a}{2}$ (المذكور في الخوارزمية) وفيما يلي نذكر بعض هذه الشروط، اختر تسامحاً **(Tolerance)** $tol>0$ واستمر في توليد $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ إلا أن يتحقق أحد الشروط التالية:

1) $\left|p_n - p_{n-1}\right| < tol$

2) $\frac{\left|p_n - p_{n-1}\right|}{\left|p_n\right|} < tol$

3) $\left|f(p_n)\right| < tol$

4) $\frac{b_n - a_n}{\left|a_n\right|} < tol$

الشروط الثلاثة الأولي يمكن أن تطبق أيضاً مع إي طريقة تكرارية، عموماً متباينة الشرط 2) تُعد افضل شرط إيقاف لتطبيق لأنها تختبر الخطأ النسبي **(Relative Error)**.

مثال:

الدالة $f(x)=x^3+4x^2-10$ لها جذر واحد فقط في الفترة $[a,b]$ طبق خوارزمية التنصيف علي هذا الجذر، بحيث يتوقف التكرار عندما يتحقق الشرط:

$$\frac{b_n - a_n}{\left|a_n\right|} < 5\times10^{-4}$$

لنضمن دقة 4 أرقام معنوية $f(2)=14$ $\qquad f(1)=-5$

بتطبيق خوارزمية التتصيف نحصل علي قيم الجدول التالية:

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1.0	2.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	1.25	1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	-0.35098
6	1.34375	1.34375	1.359375	-0.9641
7	1.1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.375	1.36328125	-0.00072
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	-0.00799
10	1.36328125	1.3671875	1.364257813	-0.00799
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	-0.00799
12	1.3647446094	1.365234375	1.364990235	-0.00396

نلاحظ أننا بعدى 12 تكرار فإن $p_{12} = 1.364990235$ إي أن الخطأ يساوي $|p - p_{12}| \le |b_{12} - a_{12}| = 0.000488281$

وبما أن

$$\frac{|b_{12} - a_{12}|}{|a_{12}|} \cong 3.6\times10^{-4} < 5\times10^{-4}$$

فالتقريب صحيح لأربعة أرقام معنوية علي الأقل والقيمة الصحيحة للجذر p لثمانية أرقام عشرية هي:

$$p = 1.36523001$$

نلاحظ أن p_9 أقرب الي الجذر الصحيح p من التقريب النهائي p_{12} ولكن لا توجد طريقة لمعرفة هذا الي إذا علمت قيمة الجذر الصحيح.

وخوارزمية التتصيف رغم أنها واضحة وبسيطة إلا أن لها عيوب كبيرة، فهي بطئيه جداً في تقاربها (أي أن N قد تصبح كبيرة جداً قبل أن يصبح المقدار $|p - p_n|$ صغيرة صغراً كافياً)، فقد يكون هنالك تقريباً متوسط جيد- أي

نتيجة أحد التكرارات المتوسطة وليس التكرار النهائي قد يهمل دون أن يلتفت إليه، مع أنه أفضل من التقريب النهائي.

طريقة التنصيف لها خاصية هامة تتميز بها وهي أنها دائماً تتقارب الى حل ولهذا السبب فهي غالباً ما تستخدم كخطوة ابتدائية أو تمهيدية تتبعها الطرق الأكثر كفاءة.

1-5-2 **تقارب طريقة التنصيف** (Convergence Of Bisection Method)

نظرية:

نفرض أن f دالة متصلة في الفترة $[a,b]$ ونفرض أن $f(a)\times f(b)<0$ ، إذا طبقنا طريقة التنصيف فإنها تولد متتالية $[p_n]$ تقُرِّب الجذر p وتحقق الخاصية:

$$|p_n - p| \le \frac{b-a}{2^n} \qquad n \ge 1$$

البرهان

إذا كان $n \ge 1$ تتحقق العلاقة الآتية

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a)$$

وكذلك $p \in (a_n, b_n)$ وحيث أن:

$$|p_n - p| \le \frac{1}{2}(b_n - a_n) = 2^{-n}(b-a)$$

متباينة هذه النظرية تعني أن المتوالية

$$[p_n] \qquad n = 1,2,3,.....$$

تتقـــارب الـــي الجـــذر p بمعـــدل تقـــارب مـــن الرتبـــة 2^{-n} $[O(2^{-n})$ rate of convergence$]$ فـإذا أعطينـا تسـامحاً $tol > 0$ أمكننـا تعين p_n تكراراً **(Iteratively)** حتى يتحقق الشرط

$$2^{-n}(b-a) < tol$$

وبالتالي يكون

$$|p_n - p| < tol$$

ومن ناحية أخري يمكننا تقدير عدد التكرارات N اللازم للوصول الي دقة معينة أي الي تسامح معين tol هكذا.

$$2^{-N}(b-a) < \varepsilon \qquad 2^{-N} < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$-N\ln 2 < \ln\varepsilon - \ln(b-a)$$

$$N > \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2}$$

أي يلزمنا عدد

$$\frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln 2}$$

من التكرارات حتى نضمن أن $|p_n - p| < \varepsilon$

يمكن كتابة الشرط السابق لعدد التكرارات N بدلالة اللوغرثيمات للأساس 10 بدلاً من الأساس e هكذا:

$$N > \frac{\log_{10}(b-a) - \log_{10}\varepsilon}{\log_{10} 2}$$

مثال:

كم تكراراً- تقريباً- يلزم لحل المعادلة

$$f(x) = x^3 + 4x - 10 = 0$$

بطريقة التنصيف بحيث نصل الي حل تبلغ دقته $\varepsilon = 10^{-5}$ وذلك بالنسبة للبداية $a_1 = 1; b_1 = 2$.

الحل

نحاول إيجاد N التي تحقق الشرط:

$$|p_n - p| \le 2^{-N}(b-a) = 2^{-N} < 10^{-5}$$

$$-N \log_N 2 < -5$$

$$N > \frac{5}{\log_{10} 2}$$

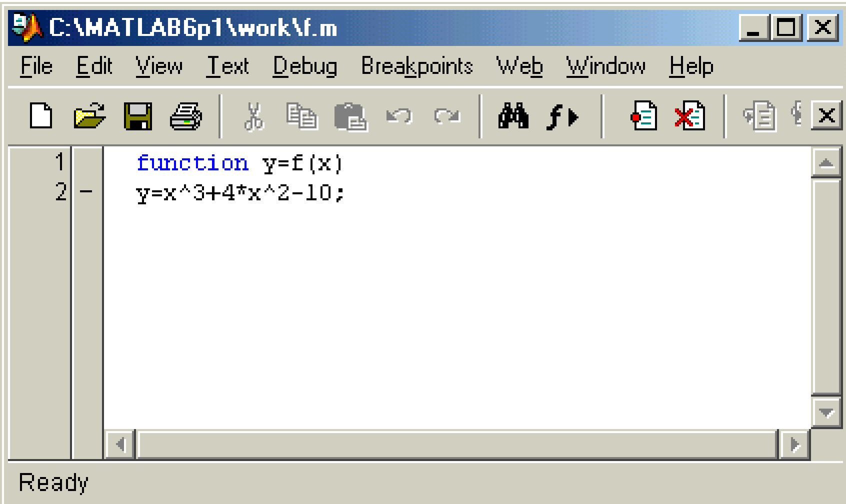
أي أن الحل يتطلب 17 تكرار للوصول الي تقريب دقته 10^{-5}

باستخدام الـ Matlab

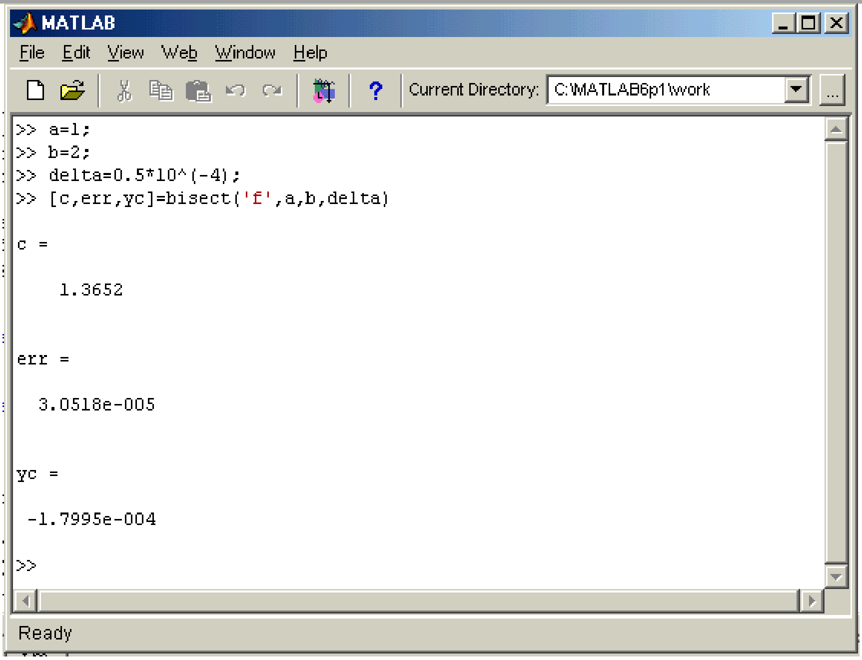
```
function [c,err,yc]=bisect(f,a,b,delta)
%Input     - f is the function input as a string 'f'
%          -a and b are the left and right end points
%          -delta is the tolerance
%Output  -c is the zero
%          -yc=f(c)
%          -err is the error estimate for c
ya=feval(f,a);
yb=feval(f,b);
if ya*yb>0,break,end
max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
for k=1:max1
    c=(a+b)/2;
    yc=feval(f,c);
    if yc==0
        a=c;
```

```
        b=c;
    elseif yb*yc>0
        b=c;
        yb=yc;
    else
        a=c;
        ya=yc;
    end
    if b-a<delta,break,end
end
c=(a+b)/2;
err=abs(b-a);
yc=feval(f,c);
```

ولحل المثال السابق يجب أولاً أن نعرف الدالة في **m.file** كالأتي:



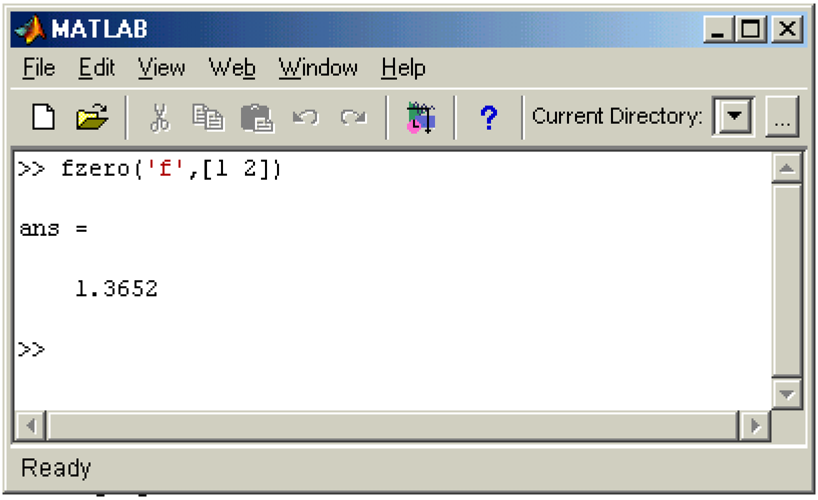
ثانياً: في الـ **command window** نكتب المدخلات كالأتي:



أيضاً يمكن استخدام الدالة fzero لإيجاد جذر المعادلة كالآتي:

أولاً: نعرف الدالة في **m.file**

ثانياً: في الـ **command window** نكتب البيانات الآتية:



6-2 طريقة النقطة الثابتة Fixed Point Method:

تستخدم هذه الطريقة لحل المعادلات وتتميز بأنها لا تطلب حساب قيم أي مشتقات بينما في طريقة **Newton Raphson** لحل المعادلة $f(x)=0$ نحتاج لمشتقة الدالة f عند كل خطوة، ولحل معادلة ما بطريقة النقطة الثابتة نضع المعادلة أولاً في صورة خاصة وهي

$x = g(x)$ حيث g دالة في x

ملحوظة:

يمكن وضع أي معادلة أي معادلة $f(x)=0$ في الصورة الخاصة أعلاه بعدد لانهائي من الطرق فمثلاً المعادلة $x^3-2=0$ تكافئ أياً من المعادلات التالية:

1) $x = x^3 - 2 + x$

2) $x = \dfrac{2 - x^3 + 5x}{5}$

3) $x = \dfrac{2}{x^2}$

وبصورة عامة فإن المعادلة $f(x)=0$ تكافئ أي معادلة علي الصورة

$x = x + \alpha f(x)$

حيث α ثابت لا يساوي صفراً، ويتم اختيار طريقة وضع المعادلة المطلوبة حلها من هذا العدد النهائي من الطرق في الصورة الخاصة $x = g(x)$ بحيث يودي حلها بطريقة النقطة الثابتة الي تقارب **(Convergence)** نحو الجذر المطلوب بينما قد يودي اختيار آخر الي تباعد **(Divergence).**

نفرض أن لدينا معادلة في الصورة $x = g(x)$ ابدأ بقيمة مناسبة $x = \chi_0$ (قريبة من الجذر) وكّون سلسلة أو متتالية من التقريبات المتتابعة باستخدام العلاقة:

$$\chi_{n+1} = g(\chi_n) \qquad n = 0,1,2,3,.......$$

إذا كان لهذه المتتالية ...... χ_0, χ_1, χ_2, نهاية (limit) هي ξ فإن هذه النهاية تكون جذر للمعادلة $x = g(x)$ أي أن $[\xi = g(\xi)]$.

نظرية:

نفرض أن g دالة مستمرة و $[\chi_n]_{n=1}^{\infty}$ متتالية مولدة بالطريقة التكرارية لنقطة الثابتة إذا كان النهاية للدالة g موجودة فإن النهاية x تكون نقطة ثابتة للدالة g أي أن:

$$\lim_{n \to \infty} \chi_n = \xi$$

مثال:

أوجد الجذر الحقيقي للمعادلة $x^3 - 2 = 0$ بطريقة النقطة الثابتة، حاول إيجاد هذا الجذر بوضع المعادلة في الصورة:

1) $x = x^3 - 2 + x$

2) $x = \dfrac{2 - x^3 + 5x}{5}$

باختيار القيمة الابتدائية (المعلوم أن القيمة المضبوطة للجذر هي $\xi = \sqrt[3]{2} = 1.259921$). $\mathrm{x}_0 = 1.2$.

الحل

$$x_{n+1} = x_n^3 - 2 + x_n$$
$$x_0 = 1.2$$
$$x_1 = (1.2)^3 - 2 + 1.2 = 0.928$$
$$x_2 = (0.928)^3 - 2 + 0.928 = -0.273$$
$$x_3 = (-0.273)^3 - 2 - 0.273 = -2.293$$
$$x_4 = (-2.293)^3 - 2 - 2.293 = -16.349$$

نلاحظ أنه لا يوجد تقارب

باستخدام الصيغة الثانية نحصل علي:

$$x_{n+1} = \frac{2 - x_n^3 + 5x_n}{5} \qquad x_0 = 1.2$$
$$x_1 = \frac{2 - x_0^3 + 5x_0}{5} = \frac{2 - (1.2)^3 + 5(1.2)}{5} = 1.2544$$
$$x_2 = \frac{2 - x_1^3 + 5x_1}{5} = \frac{2 - (1.2544)^3 + 5(1.2544)}{5} = 1.2596$$
$$x_3 = \frac{2 - x_2^3 + 5x_2}{5} = \frac{2 - (1.2596)^3 + 5(1.2596)}{5} = 1.2599$$
$$x_4 = \frac{2 - x_3^3 + 5x_2}{5} = \frac{2 - (1.2599)^3 + 5(1.2599)}{5} = 1.25992$$

نلاحظ أن القيم المتتالية تتقارب فعلاً نحو الجذر المضبوط.

ملحوظة:

سبب تقارب المتتالية التي نتحصل عليها بتطبيق الصيغة الأولي وتباعد متتالية الصيغة الأولي سنوضحه بعد دراسة مفهوم تقارب النقطة الثابتة.

1-6-2 تقارب طريقة النقطة الثابتة Convergence Of Fixed Point Method

لإيجاد علاقة تعطي الخطأ ε_{n+1} بدلالة الخطأ ε_n نفرض أن ξ هي القيمة المضبوطة للجذر عليه فإن

$$x_n = \xi + \varepsilon_{n+1}$$
$$x_{n+1} = g(x_n)$$

نحصل علي أن شرط التقارب هو

$$|g'(x)| < 1$$

مثال:

بيِّن سبب تباعد الصيغة الأولي وتقارب الصيغة الثانية في المثال السابق

الحل

بالرجوع الي المثال السابق لحل المعادلة $x^3 - 2 = 0$ حيث الجذر ξ يقع في الفترة $\xi \in [1,2]$ نجد أن الصيغة الأولي هي:

$$x = x^3 - 2 + x$$

تودي الي تباعد القيم المتتالية عن الجذر الصحيح لأن

$$g'(x) = 3x^2 + 1$$

من شرط التقارب

$$g'(x) = 3x^2 + 1 \qquad \forall x \in [1,2]$$

نجد أن

$$|g'(x)| > 1 \qquad \forall x \in [1,2]$$

إذاً الصيغة تتباعد

بينما الصيغة الثانية

$$x = \frac{2 - x^3 + 5x}{5}$$

$$g'(x) = \frac{1}{5}(-3x^2 + 5) = 1 - \frac{3}{5}x^2$$

$$|g'(x)| < 1 \rightarrow \left|1 - \frac{3}{5}x^2\right| < 1 \rightarrow \frac{3}{5}x^2 < 2 \rightarrow x^2 < \frac{10}{3}$$

أي أن $|g'(x)| < 1$ حول الجذر المطلوب

2-6-2 تقدير الخطأ والحد العلوي للخطأ في طريقة النقطة الثابتة

Error Estimate and Upper Bound For The Error In The fixed Point Method

في طريقة النقطة الثابتة نستخدم الصيغة التكرارية

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

لحل المعادلة $x = g(x)$ نفرض أن ξ هي القيمة المضبوطة للجذر، أي أن

$$\xi = g(\xi)$$

فإن الخطأ في القيمة التقريبية x_n يكون مساوياً

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_n| &= |\xi - x_n| \\
&= |(\xi - x_n) + (x_{n+1} - x_n)| \\
&\le |\xi - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \\
&= |g(\xi) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(x_{n+1})| \\
&= |\xi - x_n| \times |g'(\eta_n)| + |x_n - x_{n-1}| \times |g'(\eta_{n-1})|
\end{aligned}$$

وذلك بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة التفاضلية

(Differential Mean Value Theorem، فإذا فرضنا أن $m = \max|g'|$

وأن $m < 1$ إي أن شرط التقارب متحقق فيحقق الخطأ العلاقة الآتية:

$$|\varepsilon_n| \le |\xi_n| \times m + |x_n - x_{n-1}| \times m$$

$$|\varepsilon_n| \times |1 - m| \le m \times |x_n - x_{n-1}|$$

$$|\varepsilon_n| \le \frac{m}{1-m} \times |x_n - x_{n-1}|$$

مثال:

طبق خمس تكرارات من صيغة طريقة النقطة الثابتة لحل المعادلة $x = 0.5 + \sin x$ مبتدئا بالقيمة التقريبية $x_0 = 1$ ثم قدر الخطأ في الإجابة التي تحصل عليها.

الحل

$$x_{n+1} = 0.5 + \sin x_n$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1.341471$$

$$x_2 = 1.47382$$

$$x_3 = 1.4953015$$

$$x_4 = 1.4971517$$

$$x_5 = 1.4972894$$

$$\therefore\ x_5 - |\varepsilon_5| \le \xi \le x$$

التفسير الهندسي لشرط التقارب

Geometrical Interpretation Of Fixed Point Convergence

الأشكال التالية توضح المعني الهندسي لشرط التقارب خلال فترة حل المعادلة $x = g(x)$ بطريقة النقطة الثابتة يعني هندسياً إيجاد نقطة تقاطع المنحنين $y = g(x)$ $y = x$ عن طريق البدء بقيمة ابتدائية تقريبية x_0 ومنها نرسم خطأ راسياً يقطع الخط المستقيم $y = x$ في نقطة إحداثيها الأفقي يساوي إحداثيها الراسي يساوي x_1 أي أن الإحداثي يساوي (x_1, x_1) حيث $x_1 = g(x_0)$ ثم نحصل علي x_2 من x_1 بنفس الطريقة التي حصلنا بها علي x_1 من x_2 ونستمر هكذا في الحصول علي القيم المتتالية $x_1, x_2, x_3, ...$.

مثال:

بيِّن سبب تباعد الصيغة الأولي وتقارب الصيغة الثانية في المثال السابق

الحل

بالرجوع الي المثال السابق لحل المعادلة $x^3 - 2 = 0$ حيث الجذر ξ يقع في الفترة $\xi \in [1,2]$ نجد أن الصيغة الأولي:

$$x = x^3 - 2 + x$$

تودي الي تباعد القيم المتتالية عن الجذر الصحيح لأن

$$g'(x) = 3x^2 + 1$$

من شرط التقارب

$$g'(x) = 3x^2 + 1 \qquad \forall x \in [1,2]$$

نجد أن

$$|g'(x)| > 1 \qquad \forall x \in [1,2]$$

إذاً الصيغة تتباعد

بينما الصيغة الثانية

$$x = \frac{2 - x^3 + 5x}{5}$$

$$g'(x) = \frac{1}{5}(-3x^2 + 5) = 1 - \frac{3}{5}x^2$$

$$|g'(x)| < 1 \rightarrow \left|1 - \frac{3}{5}x^2\right| < 1 \rightarrow \frac{3}{5}x^2 < 2 \qquad x^2 < \frac{10}{3}$$

أي أن $|g'(x)| < 1$ حول الجذر المطلوب.

تقدير الخطأ والحد العلوي للخطأ في طريقة النقطة الثابتة

Error Estimate And Upper Bound For The Error In The Fixed Point Method

في طريقة النقطة الثابتة نستخدم الصيغة التكرارية

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

لحل المعادلة $x = g(x)$ نفرض أن ξ هي القيمة المضبوطة للجذر، أي أن

$$\xi = g(\xi)$$

فإن الخطأ في القيمة التقريبية x_n يكون مساوياً لـ

$$|\varepsilon_n| = |\xi - x_n|$$

$$= |(\xi - x_n) + (x_{n+1} - x_n)|$$

$$\leq |\xi - x_{n+1}|$$

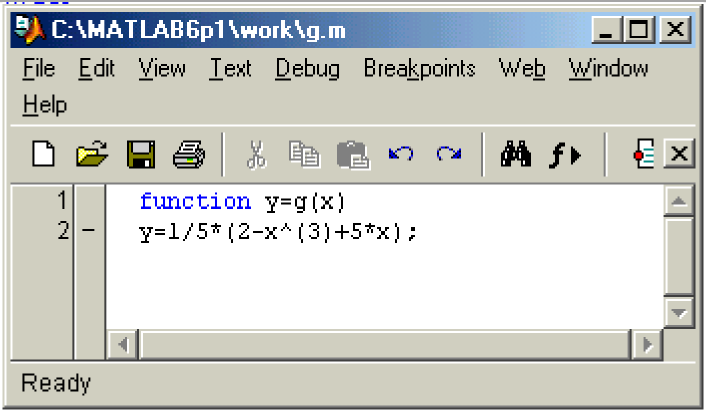
ملحوظة:

في طريقة النقطة الثابتة إذا كان $|g(\xi)|$ قريباً من القيمة 1، فإن تقارب الطريقة يكون بطئاً.

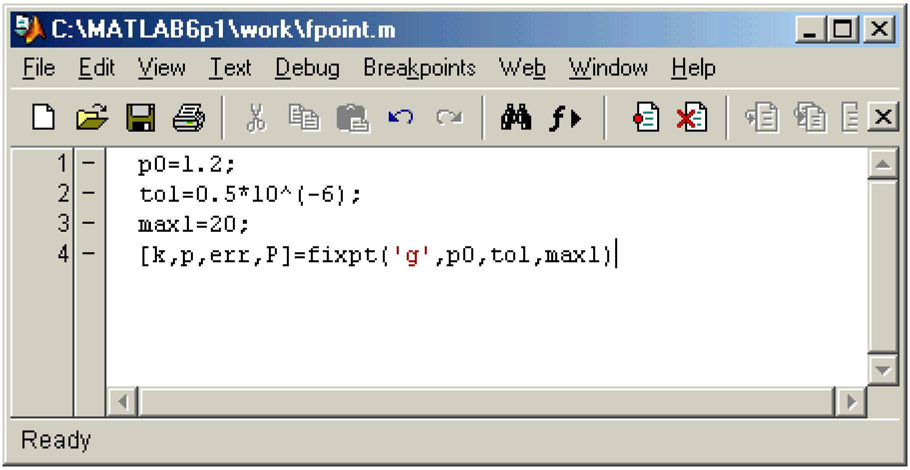
باستخدام الـ Matlab :

```
function [k,p,err,P]=fixpt(g,p0,tol,max1)
%Input  -g is the iteration function input as a string 'g'
%         -p0 is the initial guess for the fixed point
%         -tol is the tolerance
%         -max1 is the maximum number of iterations
%Output -k is the number of iterations that were carried out
%           -p mis the approximation to the fixed point
%           -err is the error in the approximation
%           -P contains the sequence {pn}
P(1)=p0;
for k=2:max1
    P(k)=feval(g,P(k-1));
    err=abs(P(k)-P(k-1));
    relerr=err/(abs(P(k))+eps);
    p=P(k);
    if (err<tol) | (relerr<tol),break;
    end
end
if k==max1
    disp('maximum number of iterations exceeded’)
end
p=P';
```

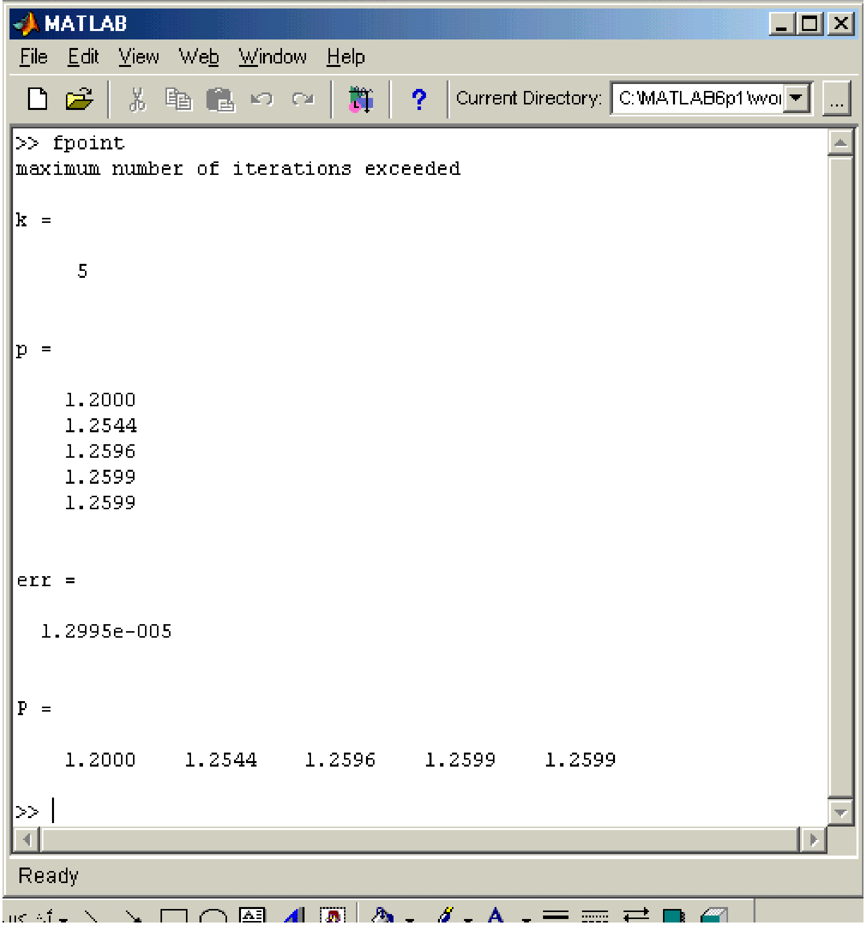
ولحل المثال الأول في هذا الجزء يجب أولاً أن نعرف الدالة التكرارية في m.file باسم g.m بالصورة الآتية:



ثانياً: لأن مخرجات هذا البرنامج طويلة بعض الشيء يجب أن ننشئ Script للمخرجات بإسم fpoint كالأتي:



ومن نافذة الأوامر نستدعي الـ **Script** كالأتي:



مسائل:

1) ضع المعادلة $5x^2-4x-13=0$ في الصورة $x=g(x)$ ومن ثم أوجد جذر المعادلة مبتدئاً بالقيمة $x_0=1$ ، $x_0=-1.1$.

2) استخدم طريقة النقطة الثابتة التكرارية في المعادلة

$$g(x)=-4+4x-\frac{1}{2}x^2$$

استخدم $x_0=1.9$ واحسب x_1,x_2,x_3 .

3) المعادلة $1.5x - \tan x = 0.1$ لها جذر $\xi = 0.259216$ أوجد هذا الجذر بطريقة النقطة الثابتة باستخدام دالة التكرارية

$$g(x) = \frac{0.1 + \tan x}{1.5}$$ مبتدئياً بالقيمة $x_0 = 0$.

4) المعادلة $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ لها الجذر $\xi = 1.368808107$ أوجد هذا الجذر بطريقة النقطة الثابتة بوضع المعادلة في الصورة

$$x = \frac{20}{x^2 + 2x + 10}$$ مبتدئاً بالقيمة $x_0 = 1$.

7-2 طريقة الوضع الزائف False Position Method (Regular False)

تتلخص هذه الطريقة في:

نفرض أن ξ هو أحد جذور المعادلة $f(x) = 0$ إذا علمنا أن هذا الجذر يقع في فترة معلومة للمتغير x مثلاً $[a,b]$ إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة علي الفترة $[a,b]$ فحسب نظرية القيمة المتوسطة فإنه يوجد جذر ξ بين $[a,b]$ بحيث $f(\xi) = 0$ وعليه ف وعليه فإن إشارة $f(a), f(b)$ تكون مختلفة **Opposite Sign** فنجد حسب الرسم أدناه أن $f(a)$

سالبة في حين أن $f(b)$ موجبة وعليه فإن أحد جذور المعادلة $f(x) = 0$ تقع بين الفترة $[a,b]$ ففي هذه الطريقة يتم تحويل الدالة $f(x)$ الي الصورة الخطية في جوار ξ أي الفترة $[a,b]$ وذلك باستبدال جزء المنحني $y = f(x)$ الواقع في هذه الفترة أي القوس $(a, f(a), b, f(b))$ بالوتر $(a, f(a), b, f(b))$ ثم نوجد تقاطع هذا الوتر مع محور x فتكون c هي القيمة التقريبية للجذر، لو كانت درجة دقة c كافية اكتفينا بها وإن لم تكون كذلك نكرر نفس العملية السابقة مرة أخري بأن نعين إشارة $f(c)$ ونقارنها بإشارتي $f(a), f(b)$ فإذا كان:

- $f(a), f(c)$ لهما نفس الإشارة فإن الفترة الجديدة التي يجب نبحث فيها عن الجذر هي $[a,c]$.
- $f(a), f(c)$ لهما نفس الإشارة فإن الفترة الجديدة التي يجب أن نبحث فيها عن الجذر هي $[c,b]$ كما في الشكل أدناه:
- إذا كان $f(c) = 0$ فإن c سوف تمثل جذر للمعادلة $f(x) = 0$ علي الفترة المحددة.

بمعني آخر نوجد أصغر فترة يحدث فيها تغير في إشارة $f(x)$ (من موجب الي سالب أو من سالب الي موجب)، في الشكل الأول تكون الفترة $[a,c]$ حيث أن إشارة الدالة تتغير من سالب الي موجب عندما تزداد x من x الي c وأما الفترة $[a,c]$ فتهمل حيث أن $f(x)$ لا تتغير إشارتها في هذه الفترة، نكرر خطوات الحل السابقة حتى نصل الي درجة الدقة المطلوبة.

لإيجاد العلاقة التكرارية لطريقة الوضع الزائف نجد أن ميل الوتر

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وتكون معادلة الوتر $(a, f(a), b, f(b))$ التي تُقرب جزء المنحني هي:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

أي أن هذه الدالة الخطية تقرب الدالة الأصلية $y = f(x)$ في الفترة $[a,b]$ لإيجاد نقطة تقاطع الوتر مع محور x نضع $y = 0 \quad and \quad x = c$ في معادلة الوتر ونوجد c وهي:

$$c = \frac{a(f(b)) - b(f(a))}{f(b) - f(a)}$$

ويمكن كتابة العلاقة التكرارية أعلاه بالصورة

$$c = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

مثال:

بيِّن أن المعادلة $x^3 - 9x^2 + 1 = 0$ لها جذر بين $a = 2 \quad and \quad b = 4$ ثم أوجد هذا الجذر لستة أرقام.

$$f(2) = 2^3 - 9 \times 2 + 1 = -9$$

$$f(4) = 4^3 - 9 \times 4 + 1 = +29$$

بما أن قيمة الدالة تغيرت من سالب الي موجب، إذاً يوجد جذر بين العدديين 4,2 ولإيجاد هذا الجذر نستخدم الصيغة التكرارية:

$$c = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

فنجد أن

$$c_2 = 4 - \frac{f(4)(4-2)}{f(4) - f(2)} = 4 - \frac{29 \times 2}{28} = 2.47368$$

$$c_3 = 2.73989$$

$$c_4 = 2.86125$$

$$c_5 = 2.91107$$

$$c_6 = 2.93816$$

$$c_7 = 2.94104$$

$$c_8 = 2.94214$$

$$c_9 = 2.94256$$

$$c_{10} = 2.94278$$

$$c_{11} = 2.94281$$

2-7-1 تقارب طريقة الوضع الزائف

Convergence Of False Position Method

من الصيغة التكرارية لطريقة الوضع الزائف

$$c = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

يمكن كتابة المعادلة أعلاه علي الصورة

$$c_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{m_n}$$

حيث
$$m_n = \frac{f(a) - f(b)}{a-b}$$

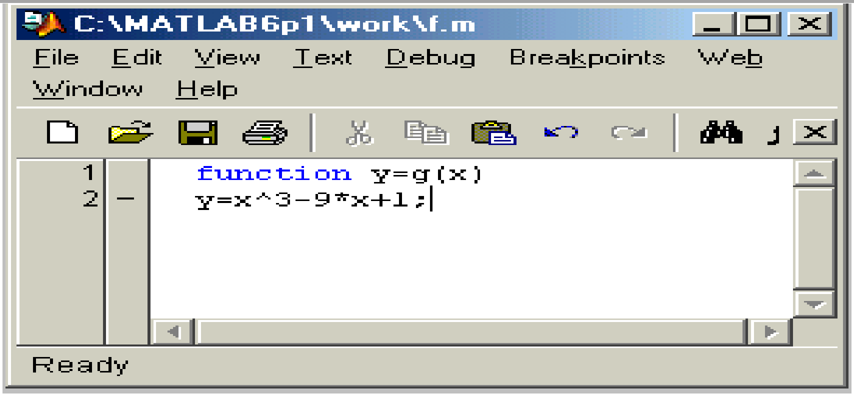
حيث m_n تمثل الوتر ويسمي الجزء المطروح بحد التصحيح (**Correcting Term**) ولكي تتقارب هذه الطريقة يجب أن يؤول حد التصحيح هذا الي الصفر كلما زادت n الي ما لانهاية.

2-7-2 التقارب باستخدام الـ Matlab

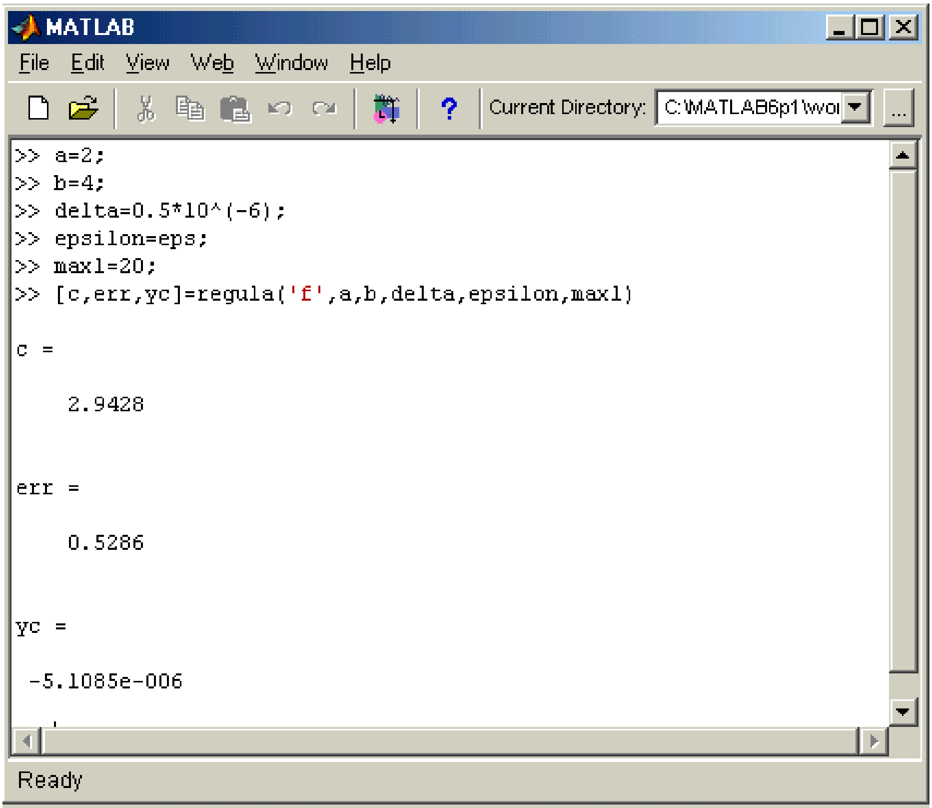
```
function [c,err,yc]=regula(f,a,b,delta,epsilon,max1)
%Input   -f is the function input as astring 'f'
%         -a and b are the left and right end points
%         -delta is the tolerance3 for the zero
%           -epsilon is the tolerance for the value of f at the zero
%          -max1 is the maximum number of iterations
%Output  -c is the zero
%           -yc=f(c)
%           -err is the error estimate for c
ya=feval(f,a)
yb=feval(f,b);
if ya*yb>0
```

```
        disp('Note:f(a)*f(b)>0');
        break,
    end
    for k=1:max1
        dx=yb*(b-a)/(yb-ya);
        c=b-dx;
        ac=c-a;
        yc=feval(f,c);
        if yc==0,break;
        elseif yb*yc>0
            b=c;
            yb=yc;
        else
            a=c;
            ya=yc;
        end
        dx=min(abs(dx),ac);
        if abs(dx)<delta,break,end
        if abs(yc)<epsilon,break,end
    end
    err=abs(b-a)/2;
    yc=feval(f,c);
```

لحل المثال المذكور في هذا الجزء يجب أولاً أن نعرف الدالة التكرارية في m.file بإسم f.m كالأتي:



ثانياً: من نافذة الأوامر نكتب المدخلات:



مسائل:

1) في الدوال أدناه أوجد الفترة $[a,b]$ التي تتغير فيها إشارة الدالة

1) $f(x) = e^x - 2 - x.$

2) $f(x) = \cos x + 1 - x.$

3) $f(x) = \ln x - 5 + x.$

2) في المعادلات أدناه أبدأ بالفترة $[a_0, b_0]$ استخدم طريقة الوضع الزائف لإيجاد c_0, c_1, c_2, c_3.

1) $e^x - 2 - x = 0 \qquad [a_0, b_0] = [-2.4, -1.6]$

2) $x^2 - 10x + 23 = 09 \qquad [a_0, b_0] = [6.0, 6.8]$

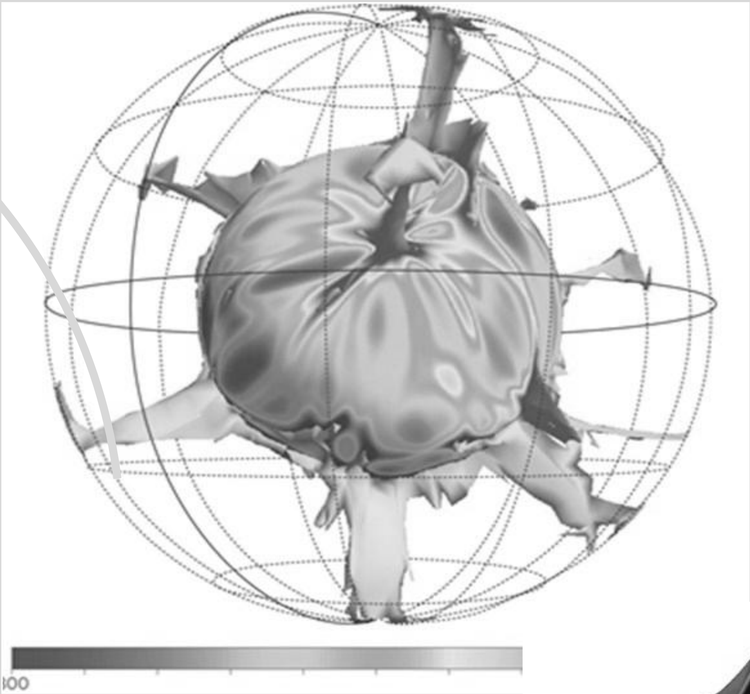
□

التحسيب العددي باستخدام لغة الماتلاب

الفصل الثالث

حل منظومة المعادلات الخطية

Solution Of Linear System Equations



3

MATLAB

The Language of Technical Computing

الفصل الثالث

حل منظومة المعادلات الخطية

Solution Of Linear System Equations

1-3 مقدمة :

تتحول كثير من مسائل التحسيب العددي الي مسألة حل نظام أو مجموعة خطية من المعادلات مثلاً حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية بطريقة الفروقات المنتهية **(Finite Difference Method)**، وكذلك حل مسائل القيم الذاتية **(Eigen Value Problem)** في x, y العديد من التطبيقات العملية تحوي المشكلة علي مجموعة من المعادلات الخطية تسمي (**System Of Linear Equations**) وعندما تكون المنظومة متكونة من معادلتين خطيتين بمجهولين x, y كالأتي:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

بحيث تكون $a_1 \neq b_1 \neq 0$ و $a_2 \neq b_2 \neq 0$ فهنالك قيمة لـ x, y تحقق المعادلتين تسمي بالحل الآني للمعادلات (Simultaneous Solution)أو حل منظومة المعادلات الخطية وهنالك ثلاثة حالات يمكن وصف حل المعادلات الخطية بيانياً علي النحو التالي:

1) عندما يكون للمنظومة حل واحد فإن المعادلات الخطية تتقاطع في نقطة واحدة ويسمي الحل الآني شكل (1a-3).

2) عندما لا يكون للمنظومة حل فإن المعادلات الخطية تكون متوازية وتحصل عندما تكون معاملات في المعادلات متناسبة x, y

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ اي المحددة $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ كما في الشكل (1b-3) .

3) عندما يكون للمنظومة عدد لانهائي من الحلول فإن الشكل البياني للمعادلات الخطية متطابق وتحصل عندما تكون المعاملات x, y والحد الثابت c في المعادلات متناسبة $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ وبذلك تكون المحددة صفرية

الشكل a عندما يكون حل واحد للمعادلتين وهي نقطة التقاطع، b عندما لا يكون هنالك حل للمعادلتين فتكون المعادلتين متوازيتين، c يكون هنالك ما لانهاية من الحلول عندما تتطابق المعادلتين.

نفرض أن مجموعة من المعادلات الخطية المطلوب حلها في الصور

Ax=y

$$A = \begin{bmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots\cdots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots\cdots & a_{2.n} \\ \vdots & & & \\ a_{n.1} & a_{n.2} & \cdots\cdots & a_{n.m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات — مصفوفة المجاهيل — مصفوفة الثوابت

أي أن مجموعة المعادلات المطلوب حلها هي

$$a_{1.1}x_1 + a_{1.2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1.n}x_n = y_1$$
$$a_{2.1}x_1 + a_{2.2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1.n}x_n = y_2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_{n.1}x_1 + a_{n.2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{n.n}x_n = y_n$$

وحتى يكون لهذا النظام حل وحيد كما ذكرنا سابقاً يجب أن تكون مصفوفة المعاملات مربعة وهذا يعني أن المصفوفة A يجب أن تكون قابلة للانعكاس **(Invertible)** ولكي تكون المصفوفة A قابلة للانعكاس يجب أن تحقق الشرط

$$\det(A) \neq 0$$

حيث det(A) هي محددة المصفوفة

عموماً يمكن تقسيم الطرق العددية لحل النظم الخطية الي:

1) الطرق المباشرة (Direct Methods)

2) الطرق التكرارية (Iterative Method)

2-3 الطرق المباشرة:

وهي الطرق التي تودي في غياب أخطاء التقريب والأخطاء الأخرى الي الحل المضبوط بعد عدد محدود من العمليات الحسابية البسيطة ومن الناحية العملية فإن الطرق المباشرة لا تودي عادة الي الحل المضبوط وذلك نسبة الي الأخطاء الناتجة من التقريب وعدم الاستقرار وفقدان بعض الأرقام المعنوية قد تودي الي نتائج غير دقيقة وربما خاطئة وغير مفيدة إطلاقاً. والطريقة الرئيسية التي تستخدم للحلول المباشرة هي طريقة الحذف لقاوس أو الطريقة المعدلة (طريقة قاوس جوردان).

3-3 الطرق التكرارية:

وهي الطرق التي تبدأ بتقريب ابتدائي ثم بإتباع خوارزمية مناسبة تودي الي تقريبات أفضل، وفي هذه الحالة حتى مع تقارب العملية . فإن كل ما نريد الوصول إليه هو حل تقريبي للنظام بإتباع مثل هذه الطرق ، وتختلف الطرق التكرارية باختلاف الخوارزمية المتبعة كما أنها تختلف من ناحية معدل التقارب فبعض هذه الطرق قد يتباعد والبعض الآخر قد يتقارب ببط شديد بحيث يصبح غير مفيد عملياً من الناحية الحسابية. ومن أهم الطرق التكرارية المستخدمة عملياً :

1) طريقة جاكوبي   2) طريقة قاوس سيدال

أولاً : الطرق المباشرة:

3-4 محدد المصفوفة :

محدد الدرجة الثانية للمصفوفة المربعة من الدرجة الثانية يمثل قيمة يتم إيجادها كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1.2} \\ a_{2.1} & a_{2.2} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{1.1} \cdot a_{1.2} - a_{1.2} \cdot a_{2.1}$$

أما محدد الدرجة الثالثة فيتم إيجادها كما يلي (للمصفوفة المربعة الثلاثية)

$$A = \begin{bmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{1.1}.\begin{vmatrix} a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix} - a_{1.2}.\begin{vmatrix} a_{2.1} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.3} \end{vmatrix} + a_{1.3}.\begin{vmatrix} a_{2.1} & a_{2.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} \end{vmatrix}$$

مثال:

لإيجاد محدد المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (-4).\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2.18 - 3.(-41) - 4.(-48) = 351$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد محدد الدرجة الرابعة لدرجات والدرجات العليا الأخرى

- محدد حاصل ضرب مصفوفتين يساوي محدد المصفوفة الأولي مضروباً في محدد المصفوفة الثانية .

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$c = A.B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|c| = -10 = |A|.|B| = -10$$

- إذا كان E مصفوفة الوحدة (مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا القطر الرئيسي) إي إذا كان :

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

فإن محدد المصفوفة E يكون مساوياً للواحد إي أن

$$|E|=1$$

3 – 5 معكوس المصفوفة :

تسمي A^{-1} بالمصفوفة المعكوسة للمصفوفة A وذلك إذا تحقق الشرط الأتي $A.A^{-1}=E$ حيث E هي مصفوفة الوحدة وحتى يتحقق هذا الشرط لابد أن يكون محدد المصفوفة A لا يساوي صفر إي أن $\det(A)\neq 0$ ولإيجاد معكوس إي مصفوفة نتبع الخطوات الآتية :

1. نوجد مرافق أي عنصر من عناصر المصفوفة وذلك لإيجاد محدد المصفوفة الناتجة بعد شطب الصف والعمود الواقع عليهما الصف المراد إيجاد المرافق له، وبذلك تنتج مصفوفة مرافقات.
2. نحدد إشارة كل عنصر وذلك بتطبيق القانون الاتي:

   إشارة العنصر= $(-1)^{i+j}$

   حيث i تمثل الصف الواقع عليه العنصر.

   j تمثل العمود الواقع عليه الصف.
3. نوجد منقول المصفوفة وذلك بجعل كل صف عمود وكل عمود صف وبهذا نكون قد وجدنا الـ *adjoin* .
4. طبق القانون

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}.adj(A)$$

مثال:

لإيجاد معكوس المصفوفة A حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نوجد أولاً محدد المصفوفة A كما في الطريقة السابقة لإيجاد محدد المصفوفة

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9$$

نوجد المصفوفة B كما يلي:

$$|B| = \frac{1}{|A|} . \begin{vmatrix} A_{1.1} & A_{1.2} & A_{1.3} \\ A_{2.1} & A_{2.2} & A_{2.3} \\ A_{3.1} & A_{3.2} & A_{3.3} \end{vmatrix}$$

حيث أن

$$A_{1.1} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{1.2} = (-1).^{1+2} . \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{1.3} = (-1)^{1+3} . \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{2.1} = (-1)^{2+1} . \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{2.2} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{2.3} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{3.1} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{3.2} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{3.3} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

وبهذا فإن B تصبح مساوية لـ

$$B = \frac{1}{-9} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{-9} & \frac{-6}{-9} & \frac{3}{-9} \\ \frac{-4}{-9} & \frac{2}{-9} & \frac{-1}{-9} \\ \frac{2}{-9} & \frac{-1}{-9} & \frac{-4}{-9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

نوجد مقلوب المصفوفة B لنحصل علي A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{3}{2} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

3 – 6 تمثيل المعادلات الخطية بالمصفوفات وحلها باستخدام المحدد :

نفرض أن مجموعة من المعادلات الخطية المراد حلها مكتوبة في الصورة Ax=y حيث A هي مصفوفة المعاملات، x هي مصفوفة المتغيرات وهو المتجه المطلوب إيجاده، y هو مصفوفة الثوابت المعلومة في الطرف الأيمن أي أن مجموعة المعادلات الخطية المطلوب حلها هي:

$$a_{1.1}x_1 + a_{1.2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1.n}x_n = y_1$$

$$a_{2.1}x_1 + a_{2.2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1.n}x_n = y_2$$

....

....

$$a_{n.1}x_1 + a_{n.2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{n.n}x_n = y_n$$

هنالك طرق كثيرة مطبقة عملياً لإيجاد حل النظام الخطي أعلاه نتناول في هذا الفصل بعض من هذه الطرق وهي:

1. الحل عن طريق قاعدة كرامر **Cramer's Rule**.
2. الحل عن طريق معكوس المصفوفة **Inverse Of The Matrix** .
3. طريقة قاوس للحذف **Gauss Elimination**، وقاوس المعدلة أو ما يسمي بطريقة جاوس جوردان **Gauss Jordan Elimination**.
4. طريقة التحليل المثلثي **Triangular Decomposition**.
5. طريقة جاكوبي التكرارية **Jacob's Method**.
6. طريقة جاوس سيدال التكرارية **Gauss Seidal**

□

7-3 الحل عن طريق قاعدة كرامر

Cramer’s Rule Method Using TO Solve Linear System Equations.

في هذه الطريقة نوجد كما يلي:

$$x_1=\frac{|x_1|}{|A|}\qquad x_2=\frac{|x_2|}{|A|}\qquad x_3=\frac{|x_3|}{|A|}$$

حيث $(|A|\neq 0)$ و X_1, X_2, X_3

$$|x_1|=\begin{vmatrix} y_1 & a_{1.2} & a_{1.3}\\ y_2 & a_{2.2} & a_{2.3}\\ y_3 & a_{2.3} & a_{3.3}\end{vmatrix}$$

$$|x_2|=\begin{vmatrix} a_{1.1} & y_1 & a_{1.3}\\ a_{2.1} & y_2 & a_{2.3}\\ a_{3.1} & y_3 & a_{3.3}\end{vmatrix}$$

$$|x_3|=\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & y_1\\ a_{2.1} & a_{2.2} & y_2\\ a_{3.1} & a_{3.2} & y_3\end{vmatrix}$$

مثال:

مستخدماً قاعدة كرامر حل المعادلات الآتية:

$$x_1+2x_2=10$$

$$3x_1+2x_2+x_3=23$$

$$x_2+2x_3=13$$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9$$

$$|x_1| = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 23 & 2 & 1 \\ 13 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -36$$

$$|x_2| = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 3 & 23 & 1 \\ 0 & 13 & 2 \end{vmatrix} = -27$$

$$|x_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 13 \end{vmatrix} = -45$$

وعليه فإن:

$$x_1 = \frac{|x_1|}{|A|} = \frac{-36}{-9} = 4$$

$$x_2 = \frac{|x_2|}{|A|} = \frac{-27}{-9} = 3$$

$$x_3 = \frac{|x_3|}{|A|} = \frac{-49}{-9} = 5$$

□

8-3 الحل عن طريق معكوس المصفوفة :

لحل النظام الخطي Ax=y معطي أن

$$Ax = y \qquad x = \frac{y}{A} = A^{-1}.y$$

$$\therefore x = A^{-1}.y$$

القيمة $A^{-1}.y$ تعطي متجه عمود نقارنه مع متجه المتغيرات x فنحصل علي كل من x_1, x_2, x_3.

مثال:

حِل المعادلات في المثال السابق باستخدام معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A^{-1} تم إيجاده سابقاً وهي

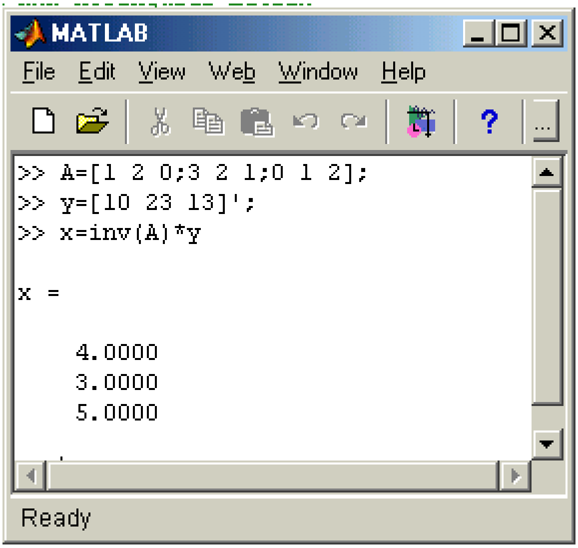
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{3}{2} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

وبتطبيق القانون $x = A^{-1}.y$ نحصل علي:

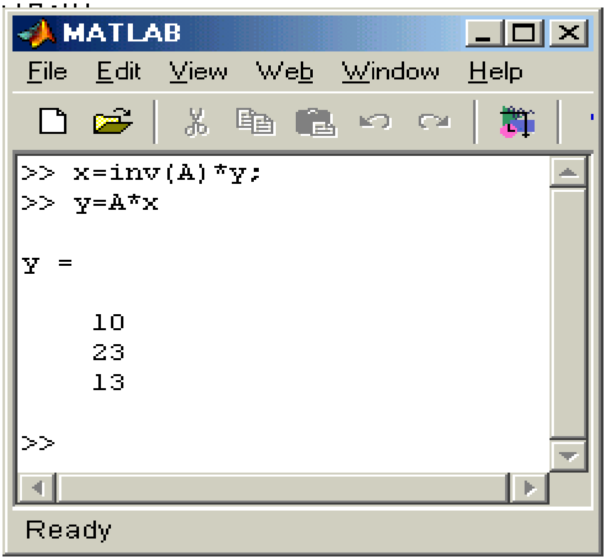
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{3}{2} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_1 = 4; \qquad x_2 = 3; \qquad x_3 = 5$$

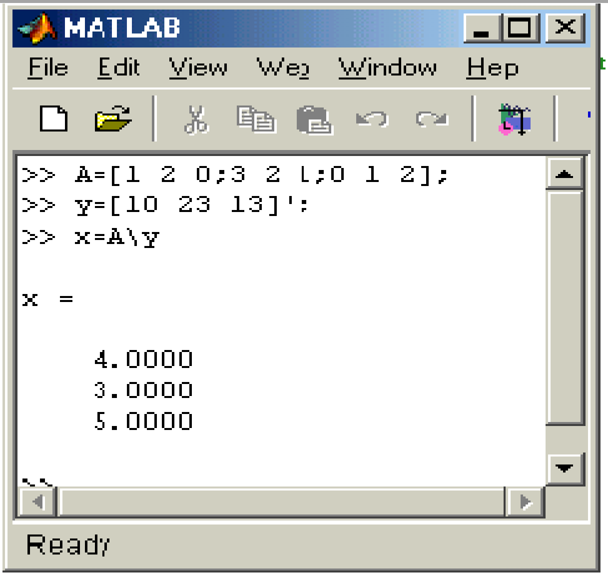
بإستخدام الـ Matlab يمكن حل المثال السابق وذلك بإستخدام الأوامر الأتية:



لتحقق من النتيجة يمكن استخدام الأمر:



يمكن أيضا استخدام الأمر $A\backslash y$ لحل النظام الخطي.



9-3 طريقة الحذف لجاوس:

Gauss Elimination Method Using To Solve linear System Equations

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من المعادلات الخطية في الخطوتين التاليتين:

1) تحويل النظام المعطي الي نظام مثلثي مكافئ للنظام الأصلي، ومعني (نظام مثلثي) أن مصفوفة المعاملات تصبح مصفوفة مثلثية.

2) حل النظام المثلثي الناتج بطريقة التعويض الخلفي.

مثال:

باستخدام طريقة الحذف لقاوس أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$20x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 0$$
$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$$
$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

الخطـوة الأولـي : تحويـل النظـام المعطـي الـي نظـام مثلثـي مكـافئ وذلـك بحذف المتغير x_1 من المعادلتين الأولي والثانية كما يلي:

$$20x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{-6}{20}\times(1)+(2) \qquad -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{-6}{20}\times(1)+(3) \qquad \frac{-3}{2}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = 6 \qquad (3)$$

وذلك بأن أبقينا المعادلة الأولي كما هي وجمعنا علي المعادلة الثانيـة الأولـي مضروبة في $\frac{-a_{2.1}}{a_{1.1}} = \frac{-6}{20}$ وجمعنا علي المعادلة الثالثة المعادلة الأولي مضروبة في

$$\frac{-a_{3.1}}{a_{1.1}} = \frac{-6}{20}$$

والآن نحذف المتغير x_2 من المعادلة الثالثة باستخدام المعادلـة الثانيـة وذلـك بأن نجمع علي المعادلة الثالثة المعادلة الثانية مضروبة في

$$\frac{-a_{3.2}}{a_{2.2}} = \frac{-(-3/2)}{(-1/2)} = -3$$

وتبقي المعادلتين الأولي والثانية هكذا:

$$20x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 0 ....(1)$$

$$-\frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{5}x_3 = 0 ....(2)$$

$$-3\times(2)+(3) \qquad \frac{1}{5}x_3 = 6 ....(3)$$

الخطوة الثانية: حل النظام المثلثي الناتج بطريقة التعويض الخلفي:

ولحل النظام المثلثي الناتج نبدأ من الخلف، أي نبدأ من المعادلة الأخيرة التي تعطينا قيمة $x_3 = 6\times 5 = 30$

ثم المعادلة الثانية تعطينا قيمة x_2

$$x_2 = (0 + \frac{3}{5} \times 30) = (-\frac{1}{2}) = -36$$

وأخيراً المعادلة الأولي تعطينا قيمة x_1

$$x_1 = (0 - 15 \times (-36) - 12 \times 30) / 20 = 9$$

أي أن الحل هو

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -36 \\ 30 \end{bmatrix}$$

طريقة أخري:

سنعيد نفس مجموعة المعادلات المعطاة بنفس طريقة الحذف ولكن مع بعض التعديلات في ترتيبها أو معاملاتها.

نبدأ بحذف x_1 من المعادلتين الثانية والثالثة باستخدام المعادلة الأولي:

$$x_1 + \frac{3}{4}x2 + \frac{3}{5}x_3 = 0........(1)$$

$$-6 \times (1) + (3) \qquad -\frac{1}{2}x2 - \frac{3}{5}x3 = 0.........(2)$$

$$6 - \times (1) + (3) \qquad \frac{-3}{2}x2 - \frac{8}{5}x3 = 0...........(3)$$

لاحظ أننا قسمنا كل معاملات المعادلة الأولي (1) علي 20 لنجعل معامل x_1 يساوي الوحدة فحصلنا علي المعادلة المكافئة (1)، ثم استخدمنا هذه المعادلة المكافئة (1) لحذف x_1 من كل من المعادلتين (3) ,(2) وذلك بضرب المعادلة (1) في عدد مناسب (-6) ثم جمعهما علي المعادلة المطلوب حذف x_1 منها، وتبقي المعادلة (1) كما هي.

والآن نحذف المتغير x_2 من المعادلة الثالثة باستخدام المعادلة الثانية، نغير ترتيب المعادلتين الثانية والثالثة وحيث أن $\frac{3}{2} > \frac{1}{2}$ فتتغير ترتيب المعادلتين (3) و (2).

$$x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{5}x_3 = 0$$
$$-\frac{3}{2}x_2 - \frac{8}{5}x_3 = 6$$
$$\frac{-1}{2}x_2 - \frac{3}{6}x_3 = 0$$

نضرب المعادلة الثانية في (-2/3) لجعل معامل x_2 يساوي الوحدة، ثم نستخدم هنا المعادلة الناتجة لحذف x_2 من المعادلة الثالثة . وذلك بضرب المعادلة الثانية (الناتجة) في $\frac{1}{2}$ وجمعها علي المعادلة الثالثة مع بقاء المعادلة الأولي والمعادلة الثانية الناتجة كما هي:

$$x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{5}x_3 = 0$$
$$x_2 + \frac{16}{15}x_3 = -4$$
$$-\frac{1}{15}x_3 = -2$$

نضرب المعادلة الأخيرة (-15) لجعل معامل x_3 يساوي الوحدة، وبذلك نصل بالمعاملات الثلاثة الي الصورة التالية:

$$x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{5}x_3 = 0$$
$$x_2 + \frac{16}{15}x_3 = -4$$
$$x_3 = 30$$

وهذه المجموعة من المعادلات – وهي تمثل نظاماً مثلثياً – تكافئ المجموعة الأصلية المعطاة (أي لها نفس الحل) وذلك لان كل من المعطيات الثلاثة :

- ضرب معادلة في ثابت
- ضرب معادلة في ثابت وجمعها مع معادلة أخرى
- تنزيل معادلتين مكان بعضهما البعض

(وهي العمليات التي أجريناها على المجموعة الأصلية) لا تتغير من حل المجموعة

الخطوة الثانية : حل النظام المثلثي الناتج بطريقة التعويض الخلفي

نبدأ حل النظام المثلثي – أي إيجاد قيم المتغيرات x_1, x_2, x_3 باستخدام المعادلة الأخيرة (أي الثالثة) والتي تعطي قيمة x_3 ، $x_3 = 30$

ثم المعادلة قبل الأخيرة (أي الثانية) ومنها نحصل على قيمة x_2 :

$$x_2 = -4 - 32 = -36$$

واخيراً المعادلة الأولى تعطي قيمة x_1 :

$$x_1 = 27 - 18 = 9$$

وهكذا حصلنا على نفس الحل السابق، وعملية جعل معامل X_i في المعادلة رقم i يساوي الوحدة يسمى التعيير (**Normalization**) وعملية تبديل المعادلات بجعل معامل X_i في المعادلة رقم i ذا اكبر قيمة مطلقة تسمى عملية الارتكاز الجزئي (**Partial Pivoting**)

1-9-3 **خوارزمية طريقة الحذف لجاوس :**

Gauss Elimination Algorithm

الخطوة الأولى : تحويل النظام المعطى إلى نظام مثلثي

(**Triangular system**) ويمكن إن يتم هذا بأسلوبين :

(1) الحذف مع التعيير (Elimination With Normalization)

- أقسم المعادلة الأولى على $a_{1.1}$ وهذا العنصر يسمى عنصراً مركزياً أو وتدياً **(pivot element)**

(إذا كان $a_{1.1} = 0$ غير ترتيب المعادلات : أي بَدِّل **(Permute)** المعادلة الأولى مع معادلة أخرى بحيث يصبح ($a_{1.1} \neq 0$)

أضف هذه المعادلة مضروبة في :

$$-a_{2.1}, a_{3.1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, -a_{n.1}$$

إلى المعادلة رقم $2,3,4,\ldots\ldots,n$

على الترتيب وذلك لحذف x_1 من كل المعادلات من الثانية إلى الأخيرة.

- اقسم المعادلة الثانية على المعادلة الجديدة $a_{2.2}$. وهذا العنصر الموجود في القطر الرئيسي والذي نقسم المعادلة عليه يسمى عنصراً مرتكزاً آو وتدياً (pivot element) (وأيضا إذا كان يساوي صفراً فغير ترتيب المعادلات).

- احذف x_2 من كل من المعادلات من الثالثة إلى الأخيرة. بطريقة مماثلة لطريقة حذف x_1 ، أي بإضافة المعادلة الثانية الجديدة مضروبة في :

$$-a_{3.2}, -a_{4.2}, \ldots\ldots, -a_{n.2}$$

الي المعادلة رقم : $2,3,4,\ldots\ldots,n$

استمر في عملية حذف العناصر $x_3, x_4, \ldots\ldots\ldots, x_{n-1}$

(2) الحذف دون تعيير Elimination Without Normalization

الخطوة الثانية: التعويض الخلفي لحل النظام المثلثي الناتج (**Back Substitution**) بالتعويض الخلفي نحصل علي قيم المتغيرات بترتيبها المعكوس هكذا

$$x_n = z_n / c_{n.n}$$

$$x_{n-1} = \frac{z_{n-1} - c_{n-1,n} x_n}{c_{n-1,n-1}}$$

(من المعادلة قبل الأخيرة)

$$X_i = \frac{z_i - \sum c_{i,k} X_k}{c_{i.i}}$$

ويمكن تلخيص خوارزمية الحل بالتعويض الخلفي للنظام المثلثي $cx = z$ حيث c مصفوفة مثلثية علوية $(n \times n)$ كل عناصرها القطرية لا تساوي صفراً بالعلاقة الآتية:

$$X_i = \frac{z_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{i.k} X_k}{c_{i.i}}; \qquad i = n, n-1, \ldots\ldots\ldots, 1$$

مثال:

مستخدماً طريقة التعويض الخلفي حل النظم المثلثي العلوي (upper-triangular matrix) الاتي:

1) $3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 8$

$$4x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$$

$$2x_3 + 3x_4 = 11$$

$$5x_4 = 15$$

نبدأ عملية إيجاد x_1, x_2, x_3, x_4 من آخر معادلة كالأتي

$$x_4 = \frac{5}{15} = 3 \qquad 2x_3 + 3x_4 = 11 \Rightarrow 2x_3 + 3\times 3 = 11 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$4x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \Rightarrow 4x_2 - 1 + 2\times 3 = -3 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \Rightarrow 3x_1 - 2\times -2 + 1 - 3 = -3 \Rightarrow x_1 = 2$$

وهكذا نكون قد حصلنا علي قيمة

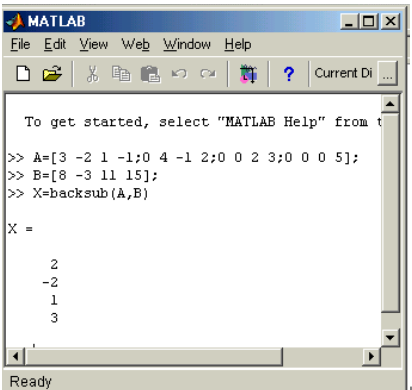
X_1، X_2، X_3، X_4

2-9-3 **عن طريق الـ** Matlab

```
function X=backsub (A,B)
%input  -A is an NxN Upper-triangular nonsingular matrix
%          -B is an nx1 matrix
%Output -X is the solution to the linear system Ax=b
%             fined the dimension of B and Initiaze X

n=length (B);
X=zeros (n,1);
X(n)=B(n)/A(n,n);
for k=n-1:-1:1
   x (k)=(B(k)-A(k,k+1:n)*X(k+1:n))/A(k,k);
end
```

لحل المثال المعطي



3-9-3 عدد العمليات الحسابية في طريقة الحذف لجاوس

Number Of Operation in Gauss Elimination Method

إذا استخدمنا طريقة الحذف لقاوس لحل نظام خطي مكون من n معادلة في n مجهول فإنه يمكن إثبات أن

عدد عمليات الضرب/ القسمة

$$\frac{n^3+3n^2-n}{3}$$

وعدد عمليات الجمع/الطرح

$$\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

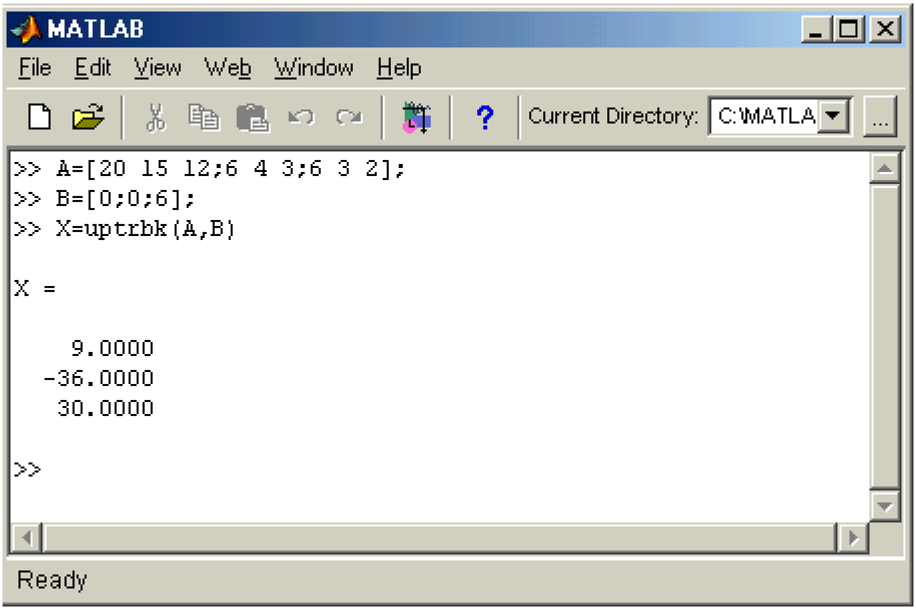
إي أن عدد عمليات الضرب والقسمة (وكذلك الجمع والطرح) يساوي تقريبا $\frac{n^3}{3}$

4-9-3 باستخدام الـ Matlab

```
function X=uptrbk(A,B)
%Input  - A is an NxN nonsingular matrix
%       - B is an Nx1 matrix
%Output - X is an Nx1 matrix containing the solution to AX=B
%Initialize X and the temporary storage matrix C
[N N]=size (A);
X=zeros(N,1);
c=zeros(1,N+1);
%Form the augmented matrix:Aug=[A|B]
Aug=[A B];
for p=1:N-1
   %Partial piovting for column p
   [Y,j]=max(abs(Aug(p:N,p)));
```

```
        %Interchange row P and j
        C=Aug(p,:);
        Aug(p,:)=Aug(j+p-1,:);
        Aug(j+p-1,:)=c;
        if Aug(p,p)==0
            'A was singular. No unique solution'
            break
        end
        %Elimination process for column p
        for k=p+1:N
            m=Aug(k,p)/Aug(p,p);
            Aug(k,p:N+1)=Aug(k,p:N+1)-m*Aug(p,p:N+1);
        end
    end
    %Back Substitution On [U|Y]
    X=backsub (Aug (1:N,1:N),Aug(1:N,N+1));
```

ولحل المثال الأول المذكور في هذا الجزء



مسائل:

استخدم طريقة الحذف لقاوس لحل نظم المعادلات الخطية الآتية:

1) $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2$

$x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18$

$[Ans: 4,3,-2]$

2) $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1$

$6x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 1$

$10x_1 + 4x_2 + 20x_3 = 6$

$[Ans: -1,-1,1]$

3) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$

$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 1$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$

$[Ans: \; no \;\; solution]$

5-9-3 طريقة جاوس جوردان للحذف

Gauss Jordan Elimination Method Using To Solve Linear System Equation

تعتبر هذه الطريقة هي نفسها طرقة جاوس للحذف مع تعديل بسيط. فمثلاً في طريقة جاوس للحذف مع التعيير(**Elimination With normalization**) بعد أن نقسم معادلة ما علي العنصر المرتكزي(**Pivot Element**) فإننا نقوم

باستخدام هذه المعادلة لحذف متغير معين من كل المعادلات التي اسفل هذه المعادلة. أما في طريقة جاوس- جوردان فإننا نقوم بإجراء عملية حذف هذا المتغير من كل المعادلات التي فوق بإضافة الي التي أسفل هذه المعادلة، ولذلك فخوارزمية طريقة جاوس- جوردان هي نفس خوارزمية طريقة جاوس مع هذا التعديل البسيط (الحذف من كل المعادلات التي فوق والتي اسفل العنصر الوتدي) وفي هذه الطريقة المعدلة نحصل أخيراً علي مصفوفة معاملات قطرية (**Diagonal Coefficient Matrix**) بل هي مصفوفة الوحدة (**Unit Matrix**) وبذلك فإننا نحصل مباشرة علي الحل النهائي لمجموعة المعادلات بدون أي حسابات أخري، فلا نحتاج لتطبيق طريقة التعويض الخلفي.

مثال:

باستخدام طريقة جاوس جوردان للحذف أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$20x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 0$$
$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$$
$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

نبدأ الحل كما في المثال السابق حيث تحذف x_1 من كل من المعادلتين الثانية والثالثة وعندما نصل الي عملية حذف x_2 فلا يحذف من المعادلة الثانية فقط ولكن من الأولي أيضاً فبدلاً من كتابة المعادلات الثلاثة التالية:

$$x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{5}x_3 = 0$$
$$x_2 + \frac{16}{15}x_3 = -4$$
$$-\frac{1}{15}x_3 = -2$$

نحصل علي المعادلات الثلاثة التالية (حيث تحذف x_2 من المعادلة الأولي بضرب الثانية في $\frac{-3}{4}$ وجمعها علي الأولي).

$$\begin{aligned} x_1 \qquad \qquad \frac{-1}{5}x_3 &= 3 \\ x_2 + \frac{16}{15}x_3 &= -4 \\ \frac{-1}{15}x_3 &= -2 \end{aligned}$$

ثم نضرب المعادلة الأخيرة في (-15) لجعل معامل x_3 يساوي الوحدة، ونستخدم المعادلة الناتجة لحذف x_3 من كل من المعادلتين الأولي والثانية وذلك بضرب الثالثة(الناتجة)وجمعها علي الأولي، وضرب الثالثة في ($\frac{-16}{15}$) وجمعها علي الثانية هكذا:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 9 \\ x_2 \quad &= -36 \\ x_3 &= 30 \end{aligned}$$

وهذه المعادلات الثلاثة تعطي الحل المطلوب للنظام المعطي، دون الحاجة الي أجراء أي حسابات أخري

ملحوظة:

إذا فرضنا أن n يمثل عدد المعادلات وهو نفسه عدد المجاهيل (أي المتغيرات) فإن عدد العمليات في طريقة جاوس تقدر بنحو $\frac{n^3}{3}$ ، بينما يقدر عدد العمليات في طريقة جاوس جوردان بنحو $\frac{n^3}{2}$ لذلك فإن طريقة جاوس تفضل عملياً لهذا السبب.

مسائل:

مستخدماً طريقة قاوس جوردان للحذف أوجد حل نظم المعادلات الخطية الآتية:

$$1)\ x_1-4x_2+3x_3-1=0$$
$$2x_1+3x_2-2x_3+11=0$$
$$3x_1-x_2+4x_3+7=0$$
$$[Ans: 2,3,1]$$

$$2)\ x_1-2x_2+3x_3=2$$
$$3x_1+4x_2-2x_3=5$$
$$2x_1+5x_2-3x_3=4$$
$$[Ans: 1,1,1]$$

$$3)\ x_1-4x_2+3x_3=-8$$
$$2x_1+3x_2-2x_3=3$$
$$3x_1-x_2+4x_3=-8$$
$$[Ans: 1,-1,1]$$

6-9-3 تطبيقات علي طريقة الحذف

Application on elimination Method

إيجاد معكوس المصفوفة Matrix Inverse

نفرض أن كلاً من A,X,B مصفوفات وأن A.X=B وأن المصفوفة A غير منفردة (Non Singular) عليه فإن معكوس المصفوفة A يعطي وفق العلاقة الآتية:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}.adj(A)$$

مثال:

نفرض أن

$$A=\begin{bmatrix}2 & -7 & 4\\ 1 & 9 & -6\\ -3 & 8 & 5\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}9\\ 1\\ 6\end{bmatrix}$$

أحسب عناصر المصفوفة المعكوسة A^{-1} لحل النظام AX=I وباستخدام الارتكاز الجزئي.

$$\times\frac{1}{2}\quad \left|\begin{matrix}2 & -7 & 4\\ 1 & 9 & -6\\ -3 & 8 & 5\end{matrix}\right|\begin{matrix}9\\1\\6\end{matrix}\left|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|$$

$$\times\frac{2}{25}\begin{bmatrix}1 & \frac{-7}{2} & 2\\ 0 & \frac{25}{2} & -8\\ 0 & \frac{-5}{2} & 11\end{bmatrix}\begin{matrix}\frac{9}{2}\\ \frac{-7}{2}\\ \frac{39}{2}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{-1}{2} & 1 & 0\\ \frac{3}{2} & 0 & 1\end{matrix}\right.$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{-6}{25}\\ 0 & 1 & \frac{-16}{25}\\ 0 & 0 & \frac{47}{5}\end{bmatrix}\begin{matrix}\frac{88}{25}\\ \frac{-7}{25}\\ \frac{94}{5}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\frac{9}{25} & \frac{7}{25} & 0\\ \frac{-1}{25} & \frac{2}{25} & 0\\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 1\end{matrix}\right.$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}4\\1\\2\end{matrix}\left|\begin{matrix}93/235 & 67/235 & 6/235\\ 13/235 & 2/235 & 16/235\\ 7/47 & 1/47 & 5/47\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow \quad x=\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix} \qquad A^{-1}=\frac{1}{235}\begin{bmatrix}93 & 67 & 6\\ 13 & 22 & 16\\ 35 & 5 & 25\end{bmatrix}$$

10-3 عدد العمليات الحسابية المطلوبة لإيجاد معكوس مصفوفة :

في المثال السابق أتبعنا طريقة جاوس-جوردان لإيجاد معكوس المصفوفة A، وذلك بأن حصلنا في الطرف الإيسر في النهاية علي مصفوفة الوحدة، فينتج أن الطرف الأيمن هو المصفوفة المعكوسة A^{-1} وكان ممكن أن نحصل عليه إذا استخدمنا طريقة جاوس للحذف وفي هذه الحالة نتحصل في النهاية علي مصفوفة مثلثية فوقية U ثم نطبق خوارزمية التعويض الخلفي عدد n من المرات.

الحل عن طريق التحليل المثلثي للمصفوفة :

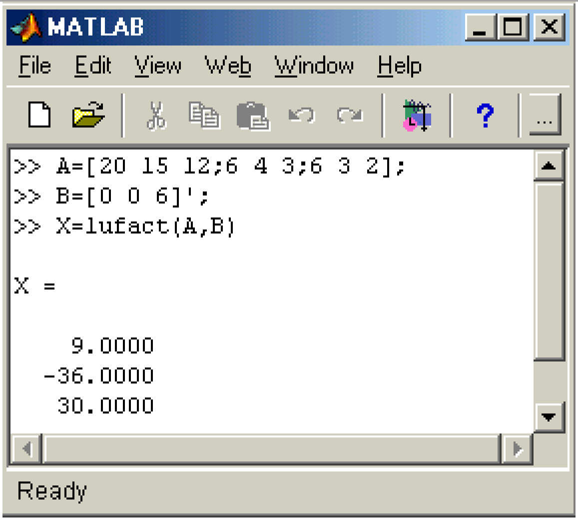
Triangular Decomposition Method Using To Solve Linear system Equations

```
function X=lufact(A,B)
%Input   -A is an NxN matrix
%         -B is an Nx1 matrix
%Output -X is an Nx1 matrix containing the solution to Ax=B.
%Initialize X,Y, the temporary storage matrix C, and the row
%permutation information matrix R
[N,N]=size(A);
X=zeros(N,1);
Y=zeros(N,1);
C=zeros(1,N);
R=zeros(1,N);
R=1:N;
for p=1:N-1;
%Find the pivot row for column P
[max1,j]=max(abs(A(p:N,p)));
%Interchange row p and j
C=A(p,:);
A(p,:)=A(j+p-1,:);
A(j+p-1,:)=C;
```

```
d=R(p);

R(p)=R(j+p-1);
R(j+p-1)=d;
if A(p,p)==0
'A is singular. No unique solution'
break
end
%calculate multiplier and place in subdiagonal portion of A
for k=p+1:N
   mult=A(k,p)/A(p,p);
   A(k,p)=mult;
   A(k,p+1:N)=A(k,p+1:N)-mult*A(p,p+1:N);
end
end
%solve for Y
Y(1)=B(R(1));
for k=2:N
   Y(k)=B(R(k))-A(k,1:k-1)*Y(1:k-1);
end
%solve for X
X(N)=Y(N)/A(N,N);
for k=N-1:-1:1
   X(k)=(Y(k)-A(k,k+1:N)*X(k+1:N))/A(k,k);
end
```

ولحل المثال المذكور في هذا الجزء



أهمية تحليل مصفوفة الي المصفوفتين L,U:

نعلم أنه يمكن أن نتعامل في طريقة الحذف لقاوس مع أطراف يمني في نفس الوقت (أي نحل عدة مجموعات من المعادلات لها نفس مصفوفة المعادلات) ولكن في أحيان كثيرة لا تكون كل الأطراف اليمني متوفرة لدينا منذ البداية، فقد نريد مثلاً أن نحل المجموعتين:

$$Ax_1 = b_1 \qquad Ax_2 = b_2$$

حيث b_2 دالة ما في x_1، وهنا قد يبدو من الضروري أن نعيد الحذف من البداية مما يكلفنا عدداً كبيراً من العمليات وسنري الآن كيف نتجنب هذا العدد الكبير، إذا استطعنا تحليل المصفوفة A الي المصفوفتين المثلثين l,U، فإن النظام Ax=y يكون مكافئاً للنظام Lux=y وهذا يتفرق الي النظامين المثلثين البسيطين Ux=y و LT=y وواضح أن النظام LT=y يمكن حله بالتعويض الأمامي **(Forward Substitution)** والنظام Ux=T يمكن حله بالتعويض الخلفي **Backward Substitution**، وهكذا إذا علمنا L,U أمكنا حل النظام Ax=y بعدد من العمليات يساوي $2\times\frac{1}{2n^2}=n^2$ بدلاً من $n^3/3$ عملية

وهـو العـدد المطلـوب لتنفيـذ طريقـة الحـذف لـاوس علـي المصـفوفة A ، وبـذلك يمكننا حل عدد كبير من النظم التي لها نفس مصفوفة المعاملات بسهولة وبعدد أقل من العمليات.

11-3 الطرق التكرارية في نظم المعادلات الخطية :

Iterative Method in Linear system Equations

في الطرق المباشرة لحل النظم الخطية نجري عدداً محدداً من العمليات للوصول الحل المطلوب، أما في الطرق التكرارية فإننا نبدأ بتقريب أولي للحل ثم نحاول الي تحسينه باستمرار مرات متتابعة الي أن نصل الي حل ذي دقة كافية وعادة نستخدم الطرق التكرارية عند حل النظم الخطية الكبيرة أي ذوات العدد الأكبر من المعادلات (والمجاهل). لأن الطرق المباشرة تودي في هذه الحالة الي انتشار أخطاء التقريب بسبب كثرة العمليات التي يتم إجراؤها وفيما يلي نوضح كيفية تنفيذ طريقتين من الطرق التكرارية .

نفرض أن النظام الخطي المطلوب حله هو Ax=y

$$a_{1.1}x_1 + a_{1.2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1.n}x_n = y_1$$

$$a_{2.1}x_1 + a_{2.2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1.n}x_n = y_2$$

....

....

$$a_{n.1}x_1 + a_{n.2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{n.n}x_n = y_n$$

ونفـرض أن $i = 1,2,3,\dots\dots$ $(a_{k.k}) \neq 0$ (وإذا كـان $(a_{i.i}) = 0$ لقيمـة معينة من قيم i فيمكن تبديل المعادلات بصورة مناسبة).

من مجموعة المعادلات السابقة يمكن أن نكتب العلاقات التالية والتي تعطي قيم المتغيرات $(x_1, x_2, x_3, \dots\dots)$ بدلالة نفس هذه القيم

$$x_1=[y_1-(a_{1.1}x_2+a_{1.3}x_3+.........+a_{1.n}x_n)]/a_{1.1}$$
$$x_2=[y_2-(a_{2.2}x_2+a_{2.3}x_3+........+a_{2.n}x_n)]/a_{2.2} \qquad (*)$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$
$$x_n=[y_n-(a_{n.1}x_1+a_{n.2.}x_2+..........+a_{n.n-1}x_{n-1})]/a_{n.n}$$

وبصورة مختصرة

$$x_i=\frac{[y_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{i.j}x_j]}{a_{i.j}} \qquad i=1,2,3,......,n$$

وعادة فإننا نعيد ترتيب المعادلات والمتغيرات (المجاهيل) بحيث تحقق قدر الاستطاعة شرط السيطرة القطرية (**Diagonal Dominance**) والذي يعني أن القيمة المطبقة لأي عنصر قطري $a_{i.i}$ تكون أكبر من أو تساوي مجموع القيم المطلقة للعناصر الأخر في صفه (الصف رقم i) ونعبر عن ذلك بالمتباينة الآتية:

$$|a_{i.i}|\geq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{i.j}| \qquad i=1,2,3,....,n$$

1-11-3 **طريقة جاكوبي** (Jacobi's Method)

(**أو طريقة التقريبات المتتابعة** Successive Approximation Method)

في هذه الطريقة نبدأ بتخمين قيم أولية للمجاهيل $(x_1,x_2,x_3,.......)$ ونفرض أننا نشير الي هذه القيم بالعلاقة بالرموز

$$x^{(0)}=x_1^{(0)},x_2^{(0)},........,x_n^{(0)}$$

ثم نعوض هذه القيم في الأطراف اليمني في مجموعة العلاقات (❖) لنحصل علي الأطراف اليسرى علي تقريبات جديدة ونشير الي هذه التقريبات أو القيم الجديدة بالرموز:

$$x^{(1)} = x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}$$

ثم نعوض هذه التقريبات الجديدة لقيم $(x_1, x_2, x_3, ...)$ في الأطراف اليمني في مجموعة العلاقات (❖) لنحصل من الأطراف اليسرى علي التقريبات جديدة

$$x^{(2)} = x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)}$$

ثم نكرر هذه العملية لنحصل علي تقريبات أفضل $x^{(3)}$ ، ونستمر في تطبيق هذه العملية الي أن نري انه لا يوجد تغير يذكر في قيم $(x_1, x_2, x_3, ...)$ ، ويمكن تلخيص ما سبق في أننا نقوم بحساب متتابعة من التقريبات $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, ...$ باستخدام العلاقة

$$x_i^{(k+1)} = y_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i.j} x_j^{(k)} \qquad i = 1,2,3,....,n$$

الي أن نصل الي الدقة المطلوبة.

ملحوظة: إذا كانت المتتابعة $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$ لها نهاية فإن هذه النهاية تكون الحل المطلوب للنظام الخطي AX=Y أي أن:

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x$$

ولكن ليس ذلك ضرورياً.

مثال:

طبق خمس تكرارات من طريقة جاكوبي لإيجاد حل المجموعة الخطية الآتية:

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$
$$-x_1 + 2x_2 \qquad = 3$$

استخدم الكسور الاعتيادية عند جراء الحسابات لتجنيب أخطاء التقريب (التي قد تنتج من استخدام الكسور العشرية).

بدل المعادلتين الثانية والثالثة لأن $a_{3.3} = 0$ وبذلك تصبح المعادلات بالترتيب التالي:.

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$
$$-x_1 + 2x_2 \qquad = 3$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

ومن هذه المعادلات نحصل علي العلاقات التالية:

$$x_1 = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3$$
$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1$$
$$x_3 = 4 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2$$

نختار اختياريا المتجه الابتدائي (**Starting Vector**) التالي للتقريبات الأولية

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبذلك نحصل علي القيم التالية في التكرار الأول

$$x_1^{(1)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \qquad = 2$$

$$x_3^{(3)} = 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \quad = \frac{13}{4}$$

والتكرار الثاني يعطينا :

$$x_1^{(2)} = \frac{11}{4} \times 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{13}{4} = \frac{15}{16}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times 2 \qquad = \frac{5}{2}$$

$$x_3^{(2)} = 4 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{4} \times 2 \quad = \frac{5}{2}$$

وبالمثل يمكن الاستمرار حتى التكرار الخامس، والجدول أدناه يوضح نتائج التكرارات حيث k يرمز الي رقم التكرار

k	x_1	x_2	x_3
0	1	1	1
1	2	2	13/4
2	15/16	5/2	5/2
3	7/8	63/32	93/32
4	133/128	31/16	393/128
5	51/512	517/256	767/256

مثال:

استخدم طريقة جاكوبي لحل مجموعة المعادلات الخطية الآتية

$$10x_1 + x_2 - x_3 - 5 = 0$$

$$x_1 + 10x_2 - 6x_3 - 3 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 10 = 0$$

نحل المعادلة الأولي بالنسبة لـ x_1 والثانية بالنسب لـ x_2 والثالثة بالنسبة الـ x_3 كما يلي:

$$x_1 = \quad -0.1x_2 + 0.1x_3 + 0.5$$
$$x_2 = 0.1x_1 - 0.6x_3 - 0.3$$
$$x_3 = 0.2x_1 - 0.4x_2 \quad + 2.0$$

x_1 $\quad$ x_2 $\quad$ x_3

$x_1 =$ $x_2 =$ $x_3 =$	 0.1 0.2	-0.1 -0.4	0.1 -0.6
$x^{(0)}$	0.500	-0.300	2.000
$x^{(1)}$	0.730	-0.10450	2.220
$x^{(2)}$	0.867	-1.559	2.726
$x^{(3)}$	0.929	-1.849	2.797
$x^{(4)}$	0.965	-1.885	2.925
$x^{(5)}$	0.981	-1.959	2.947
$x^{(6)}$	0.991	-1.970	2.980
$x^{(7)}$	0.995	-1.989	2.986
$x^{(8)}$	0.998	-1.992	2.995
$x^{(9)}$	0.999	-1.997	2.996

1. **فإذا اكتفينا برقمين عشرين فإن الحل يعطي**

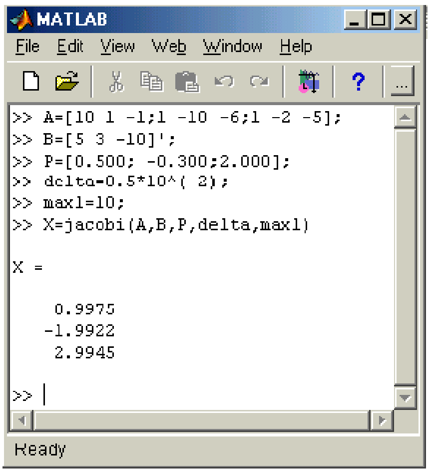
$x_1 = 0.99$ $\quad$ $x_2 = -1.99$ $\quad$ $x_3 = 2.99$

نظراً لثبات رقمين عشرين لجميع المجاهيل في الخطوتين الأخريين والحل الصحيح هو $x_3 = 3$ $\quad$ $x_2 = -2$ $\quad$ $x_1 = 1$

الحل باستخدام الـ Matlab

```
function X=jacobi(A,B,P,delta,max1)
%input  -A is NxN nonsingular matrix
%          -B is Nx1 matrix
%          -P is an Nx1 matrix; the initial guess
%          -delta is the tolerance for P
%          -max1 is the maximum number of iterations
%Output -X is an Nx1 matrix: the jacobi approximation to
%        the solution of AX=B
N=length(B);
for k=1:max1
   for j=1:N
      X(j)=(B(j)-A(j,[1:j-1,j+1:N])*P([1:j-1,j+1:N]))/A(j,j); end
   err=abs(norm(X'-P));
   relerr=err/(norm(X)+eps);
   P=X';
   if(err<delta)|(relerr<delta) break  end   end
X=X';
```

ولحل المثال المذكور في هذا الجزء



2-11-3 **طريقة جاوس – سايدل** (Gauss- Seidel Method):

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في أن التقريبات الجديدة أي القيم الأقرب للحل الصحيح- والمحسوبة بالصيغة التكرارية تستخدم هنا في طريقة جاوس سيدل بمجرد حسابها بينما في طريقة جاكوبي فإن القيم الجديدة لا تستخدم إلا بعد أن تحسب جميع قيم المتغيرات وعددها n.

ويمكن كتابة العلاقات التي تمثل الصيغ التكرارية في طريقة جاوس سيدل بالصورة الآتية:

$$x_i^{(k+1)} = \left[y_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i.j} x_j^{(k)} \right] \Big/ a_{1.1}$$

$$x_2^{(k+1)} = \left[y_2 - a_{2.1} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{n} a_{2.j} x_j^{(k)} \right] \Big/ a_{2.2}$$

لاحظ أننا استخدمنا القيمة الجديدة $x_1^{(k+1)}$ بدلاً من القيمة السابقة

$$x_3^{(k+1)} = \left[y_3 - \sum_{j=1}^{2} a_{3.j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=4}^{n} a_{3.j} x_j^{(k)} \right] \Big/ a_{3.3}$$

وعموماً فإن قيمة المتغير x_i الجديدة في التكرار رقم (k+1) تحسب بالعلاقة الآتية:

$$x_i^{(k+1)} = \left[y_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i.j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i.j} x_j^{(k)} \right] \Big/ a_{i.i} \qquad i = 1,2,3......,n$$

مثال:

مستخدماً طريقة جاوس سيدل أوجد حل النظام الخطي الاتي

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$

$$-x_1 + 2x_2 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

مستخدماً ثلاثة تكرارات.

نستخدم دائماً في الطرف الأيمن في العلاقات التكرارية لطريقة جاوس – سيدل أحدث قيم متوفرة لدينا للمتغيرات x_i .

نفرض أننا أخذنا القيم الابتدائية $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

التكرار الأول يعطينا القيم الآتية:

$$x_1^{(1)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{5}{2}$$

$$x_3^{(1)} = 4 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{19}{8}$$

والتكرار الثاني يعطينا:

$$x_1^{(2)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{19}{8} = \frac{29}{32}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{29}{32} = \frac{125}{64}$$

$$x_3^{(2)} = 4 - \frac{1}{2} \times \frac{29}{32} - \frac{1}{4} \times \frac{125}{64} = \frac{783}{256}$$

وبالمثل يمكن إجراء التكرار الثالث ونلخص النتائج فيما يلي:

k	x_1	x_2	x_3
0	1	1	1
1	2	5/2	19/8
2	29/32	125/64	783/256
3	1033/1024	4095/2048	24514/8192

مثال:

مستخدماً طريقة جاوس سيدل أوجد حل النظام الخطي الاتي:

$$10x_1 + x_2 - x_3 - 5 = 0$$
$$x_1 + 10x_2 - 6x_3 - 3 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 10 = 0$$

$x_1 =$ $x_2 =$ $x_3 =$	0.1 0.2	-0.1 -0.4	0.1 -0.6
$x^{(0)}$	0.500	-0.300	2.000
$x^{(1)}$	0.730	-1.427	2.717
$x^{(2)}$	0.914	-1.839	2.918
$x^{(3)}$	0.976	-1.953	2.975
$x^{(4)}$	0.993	-1.986	2.993
$x^{(5)}$	0.998	-1.996	2.998
$x^{(6)}$	0.999	-1.999	2.999

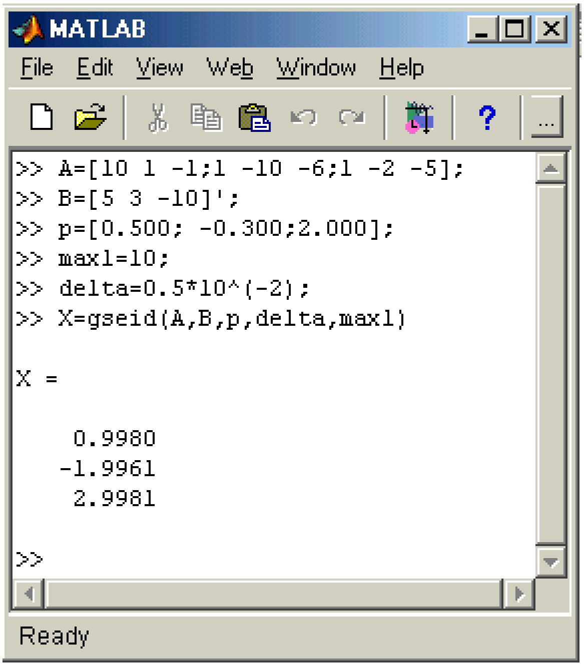
والحل للرقمين عشرين صحيحين هو

$x_1 = 0.99$ $\qquad x_2 = -1.99$ $\qquad x_3 = 2.99$

ويلاحظ أننا وصلنا لنفس درجة الدقة وهي رقمان عشريان كما في حالة جاكوبي ولكم بعد 6 خطوات (9 خطوات في طريقة جاكوبي) ولكن هذه الخاصية ليست صحيحة في جميع الأحوال ففي بعض المسائل تقارب طريقة جاكوبي أسرع من طريقة جاوس سيدل وفي البعض الأخر تتقارب طريقة جاكوبي في حين أن طريقة جاوس سيدل تتباعد.

```
function X=gseid(A,B,p,delta,max1)
%Input  -A is an NxN nonsingular matrix
%       -B is an Nx1 matrix;the initial guess
%       -p is an Nx1 matrix; the initial guess
%       -delta is the tolerance for p
%       -max1 is maximum number of iterations
%Output -X is an Nx1 matrix: the gauss-seidel
%       approximation to the solution of AX=B
N=length(B);
for k=1:max1
    for j=1:N
        if j==1
            X(1)=(B(1)-A(1,2:N)*p(2:N))/A(1,1);
        elseif j==N
            X(N)=(B(N)-A(N,1:N-1)*(X(1:N-1))')/A(N,N);
        else
            %X contains the kth approximation an p the (k-1)st
            X(j)=(B(j)-A(j,1:j-1)*X(1:j-1)-
A(j,j+1:N)*p(j+1:N))/A(j,j);
          end
        end
        err=abs(norm(X'-p));
        relerr=err/(norm(X)+eps);
        p=X';
        if(err<delta)|(relerr<delta)
            break
          end
        end
        X=X';
```

لحل المثال السابق باستخدام لغة الـ Matlab

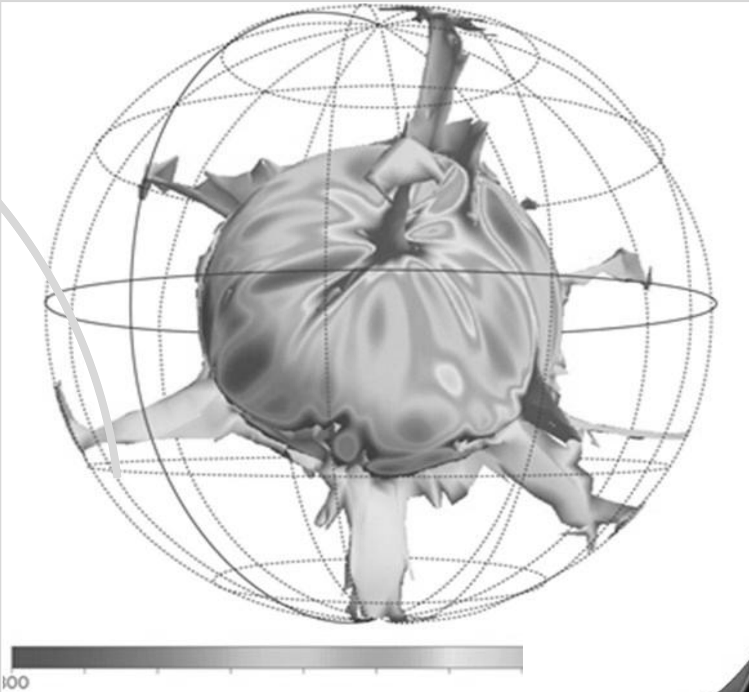


التحسيب العددي باستخدام لغة الماتلاب

الفصل الرابع

الاستكمـال

Interpolation



MATLAB
The Language of Technical Computing

4

الفصل الرابع

الاستكمــال

Interpolation

4- 1 مقدمة:

نتناول في هذا الفصل مسالة تقريب دالة عامة بمجموعة من الدوال ابسط، وتوجد فائدتان رئيسيتان لتقريب الدوال أولاهما أننا حين نستبدل بدالة معقدة دالة ابسط فإن ذلك يسهل إجراء بعض العمليات التي نحتاج إليها كالمفاضلة والمكاملة والفائدة الرئيسية هي الاستكمال من الجدول ونعني بها المسالة الآتية:

مسألة:

أعطينا قيم دالة ما $y = f(x)$ عند بعض النقاط

$x_i \qquad i = 0,1,2,3,......,n$

أي أن القيم $y_i = f(x_i) \qquad i = 0,1,2,3,......,n$

أصبحت معلومة لدينا ثم طلب منا تعيين قيمة الدالة عند النقطة x غير موجودة في جدول القيم المعطاة، وأكثر الدوال استخداماً للتقريب هي كثيرات الحدود أو الحدوديات (Polynomials) والدوال المثلثية (Trigonometric Functions) والدوال الأسية والنسبية والحدوديات هي أكثر هذه المجموعات من الدوال استخداماً على الحاسبات الإلكترونية وله تطبيقات واسعة في مجالات كثيرة مثل معالجة الصور.

طريقة حل المسالة: تُقرِّب الدالة $f(x)$ بحدودية $p(x)$ من الدرجة n بحيث تنطبق قيم الحدودية $p(x)$ مع قيم الدالة $f(x)$ عند النقاط x_i حيث $i = 0,1,2,....$ أي أن $i = 0,1,2,3,......$ $p(x_i) = f(x_i)$

ثم نستخدم هذه الحدودية لتعين القيمة $p(x)$ ونعتبر أن قيمة الدالة $f(x)$ المطلوبة عند النقطة x مساوية لهذه القيمة أي أن $f(x) \cong p(x)$ وتسمي هذه الطريقة بالاستكمال ذو الدرجة n لأننا نستخدم حدودية من الدرجة n واحياناً نستخدم لها الرمز p_n .

4- 2 تعريف الاستكمال

الاستكمال هو عملية إيجاد قيمة y عند قيمة معلومة x ليست موجودة في جدول النقاط المعطاة وتسمي هذه العملية قضية الاستكمال ويجب التفرقة بين نوعين من القضايا:

القضية الأولي:

أن النقطة المطلوبة داخل نقاط الجدول وبالتالي تسمي العملية في هذه الحالة استكمال داخلي (Interior Interpolation).

القضية الثانية:

أن تكون النقطة المطلوبة خارج نقاط الجدول وبالتالي تسمي العملية في هذه الحالة استكمال خارجي (Exterior Extrapolation)

4- 3 الاستكمال الخطي Linear Interpolation

تسمي الدالة

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x + ... + a_n x^n$$

بدالة متعددة الحدود (Polynomial) وتعرف باسم كثيرة الحدودية تسمي n هنا بدرجة هذه الدالة في حالة $n=1$ تمثل $p(x)$ خطاً مستقيماً وكما هو معلوم فإنه يكفي لتحديد الخط المستقيم نقطتان يمر بهما ويسمي في هذه الحالة بخط الاستكمال (Line Interpolation) حيث يمكن استعماله لتقدير (استكمال) نقطة ثالثة.

4-4 الاستكمال التربيعي Quadratic Interpolation

هو عملية إيجاد كثيرة الحدود من الدرجة الثانية (القطع المكافئ)

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

هنا يكون لدينا ثلاثة معاملات a_0,a_1,a_2 المارة بالنقاط الثلاثة: (x_0,y_0) $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ يجب أن تحقق ما يلي:

$$p(x_0)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2=y_0$$
$$p(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2=y_1$$
$$p(x_2)=a_0+a_1x_2+a_2x_2^2=y_2$$

وبصورة أخري

$$\begin{bmatrix}1 & x_0 & x_0^2\\ 1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_0\\ y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

مثال:

الدالة $y=f(x)$ معلوم قيمها عند النقاط المبينة في الجدول التالي:

x	1	2	4	5
$y=f(x)$	0	2	12	21

أحسب قيمة $f(3)$ باستخدام:

1) الاستكمال التربيعي باستخدام النقاط 1,2,4.

2) الاستكمال التكعيبي (cubic Interpolation).

1) الاستكمال التربيعي:

نفرض أن $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ عليه فإن

$$p(1) = 0 \rightarrow 0 = a_0 + a_1 + a_2 \qquad (1)$$

$$p(2) = 2 \rightarrow 2 = a_0 + 2a_2 + 4a_2 \qquad (2)$$

$$p(4) = 12 \rightarrow 12 = a_0 + 4a_1 + 16a_2 \qquad (3)$$

وهذه مجموعة معادلات خطية يمكن وضعها في الصورة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

وبحل النظام الخطي أعلاه نجد أن

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = -1 \qquad a_2 = 1$$

أي أن

$$p(x) = -x + x^2$$
$$f(3) \cong p(3) = -3 + 9 = 6$$

حل آخر

نفرض أن

$$p(x) = c_0(x-2)(x-4) + c_1(x-1)(x-4) + c_2(x-1)(x-2)$$
$$p(1) = 0 \rightarrow 0 = (-1)(-3)c_0 \rightarrow c_0 = 0$$
$$p(2) = 2 \rightarrow 2 = (1)(-2)c_1 \rightarrow c_1 = -1$$
$$p(4) = 12 \rightarrow 12 = (3)(2)c_2 \rightarrow c_2 = 2$$
$$\therefore\ p(x) = -(x-2)(x-4) + 2(x-1)(x+2)$$
$$f(3) = p(3) = -(2)(-1) + 2(2)(1) = 2 + 4 = 6$$

2)**الاستكمال التكعيبي بإستخدام الأربعة نقاط** $(1,2,3,4)$:

نفرض أنى $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$p(1) = 0 \rightarrow 0 = a_0 + a_1 + a_2 \qquad (1)$$

$$p(2) = 2 \rightarrow 2 = a_0 + 2a_2 + 4a_2 \qquad (2)$$

$$p(4) = 12 \rightarrow 12 = a_0 + 4a_1 + 16a_2 \qquad (3)$$

$$p(5) = 21 \rightarrow 21 = a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 \qquad (4)$$

وهذه مجموعة معادلات خطية يمكن وضعها في الصورة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 48 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 12 \\ 21 \end{bmatrix}$$

وبحل النظام الخطي أعلاه نجد أن

$$a_0 = -0.06 \qquad a_1 = -0.86 \qquad a_2 = 0.90 \qquad a_3 = 0.02$$

$$p(x) = -0.06 - 0.86x + 0.90x^2 + 0.02x^3$$
$$f(3) = p(3) = -0.06 - 0.86 \times (3) + 0.90 \times (9) + 0.02 \times (27) = 5.833$$

4- 5 حدودية لأجرانج الإستكمالية Lagrange Interpolating Polynomial

نفرض أن لدينا النقاط المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ وعددها $n+1$ نقطة علي المحور الحقيقي وأن $f(x)$ دالة حقيقية القيمة معرفة علي فترة ما $[a,b]$ تشتمل علي هذه النقاط والمطلوب تكوين حدودية $p(x)$ من درجة أقل من أو تساوي n بحيث تستكمل f (أي تنطبق مع $f(x)$) عند النقاط المذكورة إي أن:

$$p(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

وهناك عدة طرق لكتابة مثل هذه الحدودية ولكن لا يوجد اكثر من حدودية واحدة تحقق هذا الشرط كما يتبين ذلك من النظرية التالية

نظرية:

يوجد علي الأقل حدودية واحدة من درجة $n \geq 0$ تستكمل $f(x)$ عند النقاط المختلفة $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ والتي عددها $n+1$ نقطة.

البرهان

أولاً: نبرهن النظرية أولاً في الحالة الخاصة التي يكون فيها الدالة $f(x)$ مساوية للصفر عند جميع نقاط الاستكمال باستثناء واحدة كأن تحقق $f(x)$ العلاقات التالية مثلاً:

$$f(x_i) = 1 \qquad i = k$$

$$= 0 \qquad i = k$$

في هذه الحالة نبحث عن حدودية من الدرجة $\leq n$ تتلاشى عند جميع النقاط x_i باستثناء x_n ، الحدودية التالية تحقق هذا الشرط

$$g_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i)$$

$$g_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)........(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})$$

وواضح أن:

$$g_k(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)$$

لأن جميع النقاط x_i مختلفة فرضاً وبالتالي فإن

$$L_k(x) = \frac{g_k(x)}{g_k(x)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \qquad (1)$$

هو حل مسألة الاستكمال في هذه الحالة الخاصة أي أن:

$$\left.\begin{aligned} L_k(x_i) &= 1 \qquad i = k \\ &= 0 \qquad i \neq k \end{aligned}\right\} \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

ثانياً: في الحالة العامة عندما تكون $f(x)$ أي دالة اختيارية فإن:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \times L_k(x) \qquad (2)$$

هي حدودية من درجة $n \geq 0$ وتستكمل $f(x)$ عند النقاط المختلفة $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ العلاقة (2) تعطي ما يسمي بصيغة لأقرانج للحدودية الإستكمالية والحدوديات $L_0(x), L_1(x), L_2(x), \ldots\ldots, L_n(x)$ والتي تعرفها العلاقة (1) تسمي حدوديات لأقرانج للنقاط $x_0, x_1, x_2, \ldots., x_n$ علي الترتيب إي أن حدودية لأقرانج الإستكمالية من الدرجة $\leq n$ هي:

$$p_n(x) = \sum L_k(x) \times f(x_k)$$

ويمكن فك المقدار أعلاه كالأتي:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_1)\ldots\ldots\ldots\ldots(x_0 - x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(x_1 - x_n)}$$

....

....

$$L_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots\ldots\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

وكمثال بسيط علي صيغة لأقرانج نفرض أن $n = 1$ أي أننا أعطينا $f(x)$ ونقطتين مختلفتين x_0, x_1 وبالتالي يكون

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$p_2(x) = L_0(x) \times f(x_0) + L_1(x) \times f(x_1)$$

$$= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \times f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \times f(x_1)$$

$$\therefore\ p_2(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \times (x - x_0)$$

وهذه هي إحدى صيغ الاستكمال الخطي (Linear Interpolation)

مثال:

كون حدودية لأقرانج الإستكمالية من النقاط الآتية:

x	0	1	3	4
$y = f(x)$	-9	-8	18	55

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = \frac{-1}{2}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{1}{6}x(x-1)(x-4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = \frac{-1}{6}x(x-1)(x-4)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(3-4)} = \frac{1}{2}x(x-1)(x-3)$$

$$\therefore\ p(x) = L_0(x) \times f(x_0) + L_1(x) \times f(x_1) + L_2(x) \times f(x_2) + L_3(x) \times f(x_3)$$

$$= \frac{3}{4}(x-1)(x-4) + \frac{4}{3}x(x-3)(x-4) - 3x(x-1)(x-4) +$$

$$\frac{55}{12}x(x-1)(x-3)(x-4)$$

مثال:

مـن الجـدول أدنـاه للدالـة $f(x)$ قـدر قيمـة $f(0.6)$ باسـتخدام حدوديـة لأقرانج الإستكمالية:

x	0.4	0.5	0.7	0.8
$f(x)$	-0.962912	-0.693147	-0.356675	-0.233144

الحل

$$f(0.6) = \sum L_k(0.6) \times f(x_k)$$

$$L_0(0.6) = \frac{(0.6-0.5)(0.6-0.7)(0.6-0.8)}{(0.4-0.5)(0.4-0.7)(0.4-0.8)} = \frac{-1}{6}$$

$$L_1(0.6) = \frac{(0.2)(-0.1)(-0.2)}{(0.1)(-0.2)(-0.3)} = \frac{2}{3}$$

$$L_2(0.6) = \frac{2}{3}$$

$$L_3(0.6) = \frac{-1}{6}$$

$$\therefore\ f(0.6) = \frac{-1}{6}(-0.916291) + \frac{2}{3}(-0.693147) + \frac{2}{3}(-0.356675)$$

$$\frac{-1}{6}(-0.233144) = \underline{\underline{-0.509975}}$$

ملحوظة:

قيم الجدول السابق هي قيم الدالة $f(x) = \ln x$ وبالتالي فالقيمة المضبوطة هي:

$$f_{exact}(0.6) = \ln(0.6) = -0.510826$$

$$Error = 0.000851$$

4- 6 الاستكمال العكسي Inverse Interpolation

إذا أعطينا مجموعة من النقاط

$$x_i, y_i = f(x_i) \qquad i = 0,1,2,3,.....,n$$

وطلب منا إيجاد قيمة x التي تقابل قيمة معلومة (ليست في جدول النقاط المعطاة) فإن هذه المسالة تسمي بالاستكمال العكسي لأن المطلوب هو لإيجاد قيمة للمتغير x وليس y ، وأما طريقة الحل فهي تطبيق صيغة لأقرانج مع إبدال x, y مكان بعضهما البعض، أي أننا ننظر الآن علي أنها المتغير المستقل والي x علي أنه المتغير التابع $x_i = g(y_i)$.

مثال:

من القيم المعطاة في الجدول التالي أوجد قيمة تقريبية x لصفر الدالة $f(x)$ اي الجذر للمعادلة $f(x) = 0$.

يمكن وضع بيانات الجدول أعلاه في الصورة التالية:

	y_0	y_1	y_2
x_i	0.4	-0.1	-0.45
$f(x_i)$	0.2	0.3	0.5

ويصبح المطلوب هو إيجاد قيمة $g(y)$ إذا علم أن $y = 0$

$$g(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_1)} \times x_0 + \frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)} \times x_1 + \frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)} \times x_2$$

$$\therefore g(y) = \frac{0.1 \times 0.45}{0.5 \times 0.85} \times 0.2 + \frac{-0.4 \times 0.45}{-0.5 \times 0.35} \times 0.3 + \frac{-0.4 \times 0.1}{-0.85 \times -0.35} \times 0.5$$

$$\therefore x = 0.2625209$$

ملحوظة:

يمكـن اعتبـار إيجـاد جـذر x للمعادلـة $f(x)=0$ بطريقـة نيـوتن رافسـون تطبيقاً علي الاستكمال العكسي.

4- 7 دقة صيغة لأقرانج الإستكمالية (إيجاد الخطأ)

Lagrange Interpolating Accuracy

ليس من الممكن تقدير الخطأ $f-p_n$ إذا علمنا فقط قيم الدالة $f(x)$ عنـد المواضـع $x=x_0,x_1,x_2,........,x_n$ بـل يجـب معرفـة معلومـات أخـري عـن الدالة $f(x)$ ولبيان ذلك نفترض أن لدينا مجموعة من النقاط التالية التي عددها $n+1$

$$(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),.......,(x_n,f(x_n))$$

حيث $x_0,x_1,x_2,........,x_n$ جميعها مختلفة هذه النقاط تحدد تماماً الحدودية p_n ولتعريف أو تحديد الدالة $f(x)$ يمكننا رسم منحني يمر بهذه النقاط التي عددها $n+1$ وبالتالي يمكننا جعل الفارق $[f(x)-p_n(x)]$ كبيراً بحيث تصل قيمته الي أي قيمة نختارها عند أي موضع x خلاف المواضع $x=x_0,x_1,x_2,........,x_n$ حيث الفارق $[f(x)-p_n(x)]$ يساوي صفر علي أنه يمكننا تقدير الخطأ $f-p_n(x)$ بدلالة مشتقة f ذات الرتبة $n+1$ إذا وجدت، كما تبين ذلك النظرية التالية:

نظرية:

نفـرض أن $[a,b]$ هـي اي فـترة تحتـوي علـي كـل النقـاط $x_0,x_1,x_2,....,x_n$ وعددها $n+1$ نقطة ونفرض أن الدوال $f,f',f'',.......,f^{(n)}$ لها وجود ومتصلة في الفترة $[a,b]$ ونفرض أن المشتقة $f^{(n+1)}$ لها وجود في الفترة $a<x<b$ فإن أعطينا

اي نقطة $x \in [a,b]$ فإنه يوجد عدد c (يعتمد علي x) في الفترة $[a,b]$ بحيث أن:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)..........(x - x_n) \times \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

مثال:

الجدول التالي يعطي قيمتين للدالة $f(x)$ عند نقطتين، استخدم هذا الجدول والاستكمال الخطي لإيجاد قيمة $f(3.16)$ وقدِّر (باستخدام صيغة الخطأ) في النتيجة التي تحصل عليها

x	3.1	3.2
$f(x)$	1.1314	1.1632

بالاستكمال الخطي

$$f(3.16) = p_1(3.16) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \times (x - x_0)$$

$$= 1.1314 + \frac{0.0318}{0.1} \times 0.06 = 1.15048$$

$$\cong 1.1505 \quad (for \quad four \quad decimal)$$

ولتقدير الخطأ في النتيجة $f(3.16)$ التي حصلنا عليها نستخدم صيغة الخطأ

$$E_1(x) = f(x) - p_1(x) = (x - x_0)(x - x_1) \times \frac{f''(c)}{2!}$$

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f''(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore E_1(x) = (3.16 - 3.1)(3.16 - 3.2) \times \frac{-1}{2c^2}$$

وحيث أن c تقع بين 3.1,3.2 لذلك فالخطأ يقع بين (0,0.0011,0,0.00013) أي أن:

$$|E_i(x)| \le 0.00013$$

هذا يعني أن الجواب التي حصلنا عليه صحيح لثلاثة أرقام عشرية علي الأقل وهذا يتفق مع الواقع حيث أن القيمة التي نحصل عليها من الجدول لأربعة أرقام عشرية هي:

$$\ln 3.16 = 1.1506$$

أي أن القيمة التي حصلنا عليها تختلف مع القيمة الصحيحة بوحدة واحدة فقط في الموضع العشري الرابع.

عدد العمليات الحسابية المطلوبة لحساب قيمة الحدودية الإستكمالية في صيغ لأقرانج عند نقطة ما:

$3n+1$ عمليات ضرب/قسمة

$2n+1$ عمليات جمع/طرح

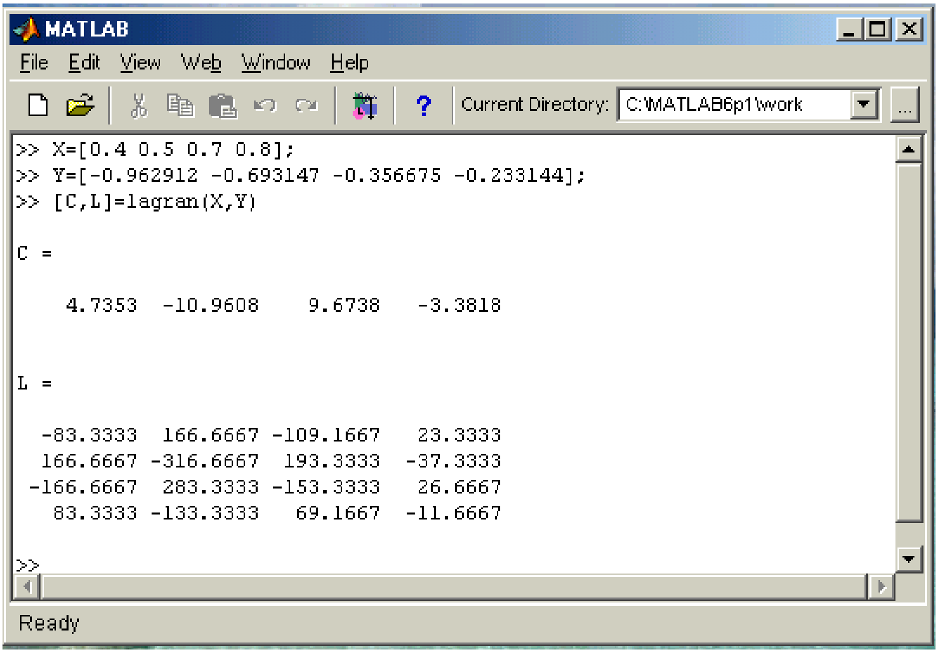
وذلك بعد حساب مقامات حدوديات لاقرانج في هذه الصيغة.

4- 8 باستخدام الـ Matlab

```
function [C,L]=lagran(X,Y)
%Input  -X is a vector that contains a list of abscissas
% -Y is avector that contains alist of ordinates
%Output -C is a matrix that contains the cofficients of
% -the Lagrange Interpolatory polynomial
%  -L is amtrix that contains the lagrange cofficient polynomials
w=length(X);
n=w-1;
L=zeros(w,w);
 %Form the lagrange coefficient polynomials
for k=1:n+1
 V=1;
```

```
 for j=1:n+1
  if k~=j
V=conv(V,poly(X(j)))/(X(k)-X(j));
  end
 end
 L(k,:)=V;
end
%Determine the coefficients of the Lagrange interpolating
%polynomial
C=Y*L;
```

ولحل المثال الثاني المذكور في هذا الجزء



4- 9 صيغ الاستكمال باستخدام الفروق

Interpolation Formulas By Use Of Differences

كما ذكرنا سابقاً يتطلب حساب قيمة الحدودية الإستكمالية في صيغ لأقرانج عند نقطة ما عدد من العمليات الحسابية لا يقل عن

$3n+1$ عمليات ضرب/قسمة

$2n+1$ عمليات جمع/طرح

وذلك بعد حساب مقامات حدوديات لأقرانج في هذه الصيغة، وهذا يودي الي كثرة العمليات الحسابية المطلوبة لتطبيق صيغة لاقرانج وهو أحد عيوب حساب قيمة حدودية استكماليه باستخدام صيغة لاقرانج هنالك عيب آخر أهم وهو أنه إذا حسبنا حدودية $p_n(x)$ تمر بمجموعة من النقاط ثم أضيفت نقطة أخري للمجموعة فلا يمكننا استنتاج الحدودية $p_{n+1}(x)$ من الحدودية المعلومة $p_n(x)$ ، وغالباً ما تظهر هذه المشكلة لأنها من الناحية العملية لا يعرف الإنسان إبتداءاً الي كم من نقاط الاستكمال يحتاج للاستكمال وبالتالي فإذا كان $p_n(x)$ هي الحدودية من درجة $\leq n$ والتي تستكمل $f(x)$ عند النقاط $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ فإن الواحد يأخذ في حساب $p_0(x), p_1(x), p_2(x), ...$ بأن يظل في زيادة عدد نقاط الاستكمال وبالتالي درجة الحدودية الإستكمالية الي أن يصل الي تقريب مقبول $p_n(x)$ للدالة $f(x)$ وفي مثل هذه العملية (عملية حساب حدوديات متتابعة) يظهر أن استخدام صيغ لاقرانج يكون مضيعة للوقت لأنه عند حساب $p_{n+1}(x)$ لا يمكننا الاستفادة من قيمة $p_n(x)$ المحسوبة ولذلك يفضل استخدام صيغ الاستكمال باستخدام الفروق وفي هذا الجزء نستعرض أحد هذه الصيغ وهي الاستكمال باستخدام الفروق المقسومة.

4- 9- 1 **حدوديات نيوتن** Newton Polynomials

حدوديات نيوتن نتحصل عليها من الصيغ التالية

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$
$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

....

....

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$+ .... + a_n(x - x_0)(x - x_1).......(x - x_{n-1})$$

في هذه الحالة الحدودية $p_n(x)$ نتحصل عليها من الحدودية $p_{n-1}(x)$ باستخدام العلاقة الآتية

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_0)(x - x_2) + ... + (x - x_n)$$

مثال:

معطي النقاط $x_3 = 4.5$ $x_2 = 4;$ $x_1 = 3;$ $x_0 = 1;$ والمعاملات $a_0 = 5$

$a_4 = 0.03$ $a_2 = 0.5$ $a_1 = -2$ أوجد $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$

ثم أحسب $p_n(x)$ حيث $n = 1,2,3,4$ و $x = 2.5$.

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$
$$= 5 - 2(x - 1)$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$= 5 - 2(x - 1) + 0.5(x - 1)(x - 3)$$

$$p_3(x) = p_2(x) - 0.1(x - 1)(x - 3)(x - 4)$$
$$p_4(x) = p_3(x) + 0.003(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 4.5)$$

وعند $x = 2.5$ نتحصل علي

$$p_1(x) = 5 - 2(2.5 - 1) = 2$$
$$p_2(x) = p_1(x) + 0.5(1.5)(-0.5) = 1.625$$
$$p_3(x) = p_2(x) - 0.1(1.5)(-0.5)(-1.5) = 1.5125$$
$$p_4(x) = p_3(x) + 0.003(1.5)(-0.5)(-1.5)(2) = 1.50575$$

4- 9- 2 تقريب حدوديات نيوتن Newton Polynomials Approximation

نفرض أننا نريد إيجاد المعاملات a_k لكل الحدوديات $p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ إي إيجاد الحدودية $p_n(x)$ والتي تقرب الدالة $f(x)$ ، بالنسبة للحدودية $p_1(x)$ فإن المعاملات a_0, a_1 نتحصل عليها كالأتي:

$$p_1(x_0) = f(x_0) \qquad p_1(x_1) = f(x_1) \qquad (1)$$

وباستخدام الصيغة

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \qquad (2)$$

والصيغة (1) نتحصل علي

$$f(x_0) = p_1(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) = a_a$$
$$\therefore f(x_0) = a_0 \qquad (3)$$

ولإيجاد المعامل a_1 نستخدم العلاقات (1) و (2) و (3)

$$f(x_1) = p_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$$
$$\therefore a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

وهكذا نتحصل علي بقية المعاملات.

نظرية:

إذا كان $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ نقاط عددها $n+1$ تنتمي للفترة $[a,b]$ فإنه توجد حدودية واحدة (Unique Polynomial) $p_n(x)$ من درجة $\geq n$ تستكمل النقاط المذكورة وفق العلاقة

$$f(x_i) = p_n(x_i) \qquad i = 0,1,2,3,\ldots\ldots,n$$

صيغة نيوتن لهذه الحدودية تعرف بالعلاقة الآتية

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots\ldots\ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n)$$

$$where$$

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k] \quad for \quad k = 0,1,2,3,\ldots,n$$

4- $9-3$ **دقة صيغة نيوتن الإستكمالية** Newton Polynomial Accuracy

نفرض أن $p_n(x)$ هي حدودية نيوتن والتي تستخدم لتقريب أو استكمال الدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ عليه فإن

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x)$$

حيث $E_n(x)$ تمثل حد الخطأ والذي يساوي

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n) \times \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

ملحوظة:

نلاحظ أن صيغ الاستكمال المختلفة التي تناولناه في هذا الفصل سواء صيغة لأقرانج الإستكمالية أو صيغة نيوتن تعتبر جميعها صوراً مختلفة لتمثيل نفس الحدودية (الوحيدة) التي تمر بمجموعة النقاط المعطاة عليه فإن صيغة الخطأ $E_n(x)$ في إي من الصور لا تختلف ويساوي

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)........(x-x_n)\times\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

4- 9- 4 تعريف الفروق المقسومة (Definition Of The Divided Difference)

الفروق المقسومة للدالة $f(x)$ تعرف كالأتي

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f[x_0]-f[x_0,x_1](x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f(x)}{}$$

4- 10 طريقة المربعات الصغرى Least Square Method

في بعض الأحيان نتحصل علي معلومات ميدانياً أو معملياً في مختلف المجالات العلمية وتكون هنالك حاجة للتعبير عن هذه البيانات في شكل معادلة من أجل درستها وتحليلها واستخلاص نتائج منها ، طريقة المربعات الصغرى أحد هذه الطرق التي تستخدم لإيجاد أفضل دالة تناسب البيانات المعطي و لاستخدام طريقة المربعات الصغرى لابد من تحديد درجة الدالة المتعددة الحدود

Y=f(x)

ثم يتم حساب الفرق بين قيمة Y التي تمثل البيانات والقيمة التقريبية y التي تعطيها هذه المعادلة ويسمي هذا الفرق بحد الخطأ أي أن

$$d = y - Y = y_k - f(x_k)$$

نوضح في هذا الجزي كيفية إيجاد أفضل دالة بطريقة المربعات الصغرى للدوال الخطية ثم الدوال غير الخطية.

الدوال الخطية في المربعات الصغرى

إذا كانت العلاقة بين قيم (X,Y) المعطاة خطية وإذا عرفنا الدالة

$$Y_i = a + b\,x_i$$

فبالنسبة الي فروق المحور الصادي بين القيم المعطاة y_i والقيمة التقريبية Y_i

$$d_i = y_i - Y_i$$

و بتعويض قيمة من معادلة الخط المستقيم ينتج أن

حيث d هو الفرق علي المحور الصادي، سيكون هنالك فرق لكل نقطة من النقاط المعطاة أي

$$Q = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots\dots + d_n^2$$

وبجمع هذه الفروق نحصل علي

$$Q = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y - (a + b\,x_i))^2$$

$$= \sum (y_i^2 - 2\,y_i(a + b\,x_i) + (a + bx_i)^2)$$

$$= \sum (Y_i^2 - 2\,y_i a + 2\,y_i b\,x_i + a^2 + 2ab\,x_i + b^2 x_i^2)$$

وللحصول علي أصغر قيمة لمجموع المربعات نفضل Q ونساويه بالصفر

$$\frac{dQ}{da} = \sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - a - b\,x_i)(-1) = 0$$

$$\frac{dQ}{da} = \sum 2(Y_i - a - b\,x_i)(-x_i) = 0$$

بقسمة كل من المعادلتين علي (2-) وفك المجموع نحصل علي معادلتين اعتياديتين

$$b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$b\sum_{i=1}^{n} x_i + an = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

وللحصول علي معادلة الخط المستقيم تكون قيم الـ a,b كالأتي

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$a = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

حيث تمثل a تقاطع الخط المستقيم مع المحور الصادي وتمثل b مقدار انحدار الخط المستقيم.

مثال:

جد أفضل معادلة بطريقة المربعات الصغرى للبيانات الآتية

x_i	0	1	1	2	3	4	2	5
y_i	3	4	6	9	11	15	10	16

الحل:

عدد النقاط المعطاة n=8

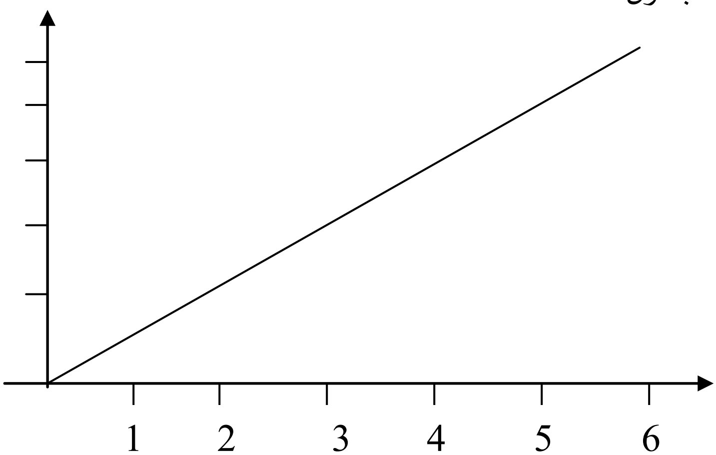
x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y$
0	3	0	0
1	4	1	4
1	6	1	6
2	9	4	18
3	11	9	33
4	15	16	60
2	10	4	20
5	16	25	80
$\sum X_i = 18$	$\sum Y_i = 74$	$\sum X_i^2 = 60$	$\sum X_i Y_i = 221$

$$\therefore a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8} \times (74 - 2.725 \times 18) = 2.961$$

عليه فإن معادلة الخط المستقيم

$$Y = ax + b = 2.961x + 2.795$$

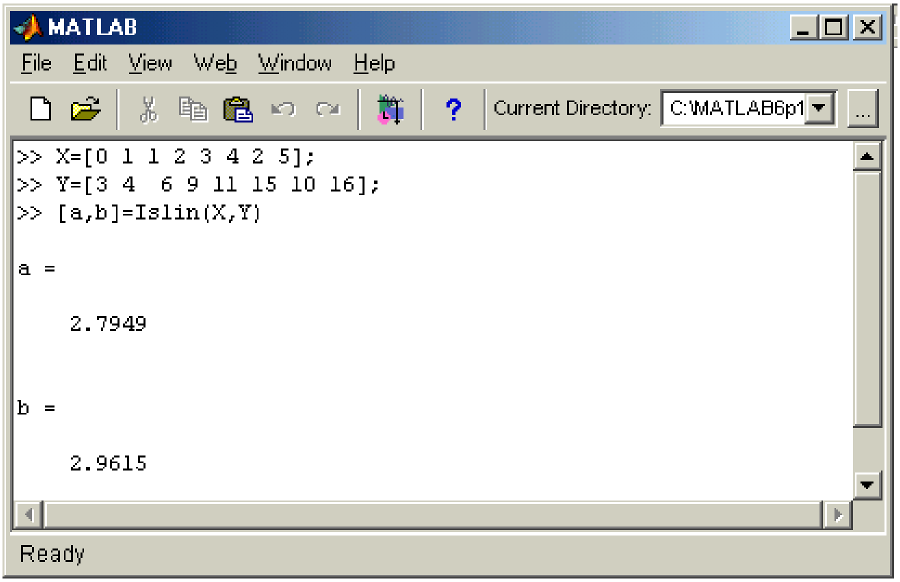
وعند تعويض قيم X في هذه المعادلة نحصل علي قيم Y المقاربة لقيم y المعطاة في الجدول.



بإستخدام الـ Matlab

```
function [a,b]=Islin(X,Y)
%Input -X is the 1xn abscissa vector
%-Y is the 1xn ordinate vector
%Output -a is the coefficient of x in Ax+B
%-a is the constant coefficient in Ax+B
xmean=mean(X);
ymean=mean(Y);
sumx2=(X-xmean)*(X-xmean)';
sumxy=(Y-ymean)*(X-xmean)';
a=sumxy/sumx2;
a=ymean-a*xmean;
```

لحل المثال المذكور في هذا الجزء



مثال:

أوزان وأطوال تسعة أشخاص تتراوح أعمارهم بين 25-30 سنة كما مبين في الجدول أدناه جد علاقة خطية بين الطول والوزن

h_i	72	68	66	60	74	70	64	76	64
w_i	174	152	154	135	180	161	140	174	157

الحل:

h_i	w_i	h_i^2	$h_i w_i$
72	174	5184	12528
68	142	4624	10336
66	154	4356	10164
74	180	4576	13320
62	135	3844	8370
70	161	4900	11270
64	140	4090	8960
76	174	5776	13227
64	157	4096	10048
$\sum h_i = 610$	$\sum w_i = 1427$	$\sum h_i^2 = 42352$	$\sum h_i w_i = 98220$

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى لإيجاد المعاملات a,b لإيجاد أفضل خط مستقيم y=a+bx حيث أن $w = y$, $h = x$

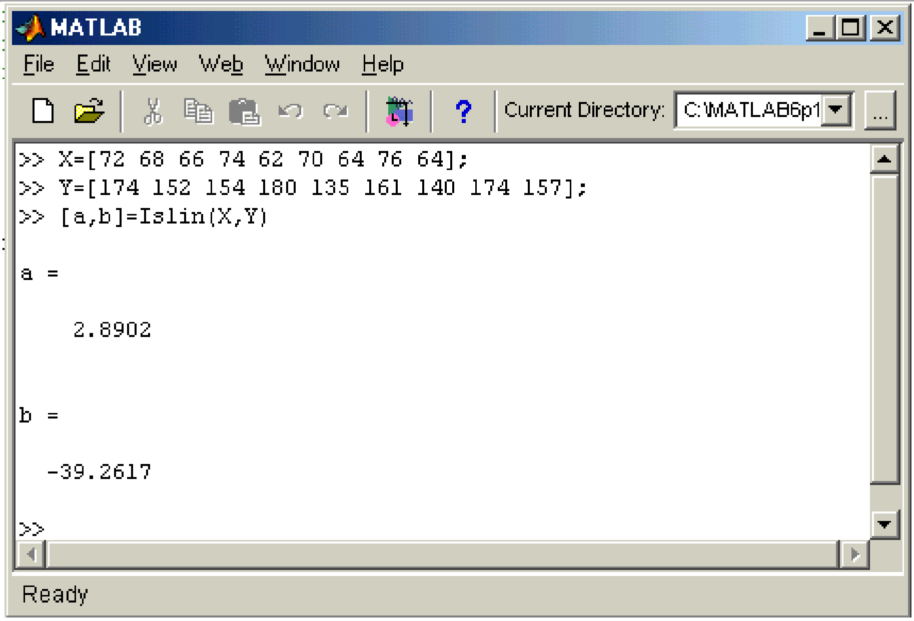
$$\therefore b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)} = \frac{9\times 98220 - 1427\times 616}{9\times 42352 - (616)^2} = 2.8902$$

$$\therefore a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{9}\times(1427 - 2.892\times 616) = -39.2625$$

فتكون المعادلة

$$w = -39.2625 + 2.8902h$$

ويمكن حل المثال أعلاه بنفس البرنامج



مثال:

إذا كانت البيانات المتوفرة لدينا للمتغيرات (x_i, y) تتناسب مع المعادلة $y = ax^2$ جد أنسب قيمة للمعامل a بطريقة المربعات الصغرى

الحل:

بأخذ لوغرثم للطرفي المعادلة $y = ax^2$ نحصل علي

$$\log y = \log a + 2\log x$$

وبذلك نكون حولنا المعادلة الي معادلة من الدرجة الأولي يمكن حلها ببساطة بالاسلوب الخطي والحصول علي قيمة a.

4- 11 الدوال غير الخطية من الرتبة n.n Nonlinear Functions of order n.n

إذا كانت Y دالة متعددة حدود Polynomial من الرتبة n

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots\dots\dots + a_n x_n$$

يعرف الخطأ بأنه الفرق بين قيم الدالة y_i المعطاة والقيم المحسوبة من المعادلة y_i

$$d_i = y_i - Y_i = y_i - a_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2^2 + \dots\dots\dots\dots + a_n x_n^2$$

فيكون مجموع الفروق بين Q بعد تعويض قيمة Y_i

$$Q = \sum d_i = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 + \dots\dots\dots\dots + a_n x_i^2)$$

وبأخذ تفاضل Q بالنسبة للثوابت $(a_0, a_1, a_2, \dots\dots\dots, a_n)$ ومساواتها بالصفر نحصل علي (n+1)

معادلة تحتوي كل معادلة علي الثوابت $(a_0, a_1, a_2, \dots\dots\dots, a_n)$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots\dots\dots\dots\dots a_n x_i)(-i) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots\dots\dots\dots\dots - a_n x_i^n)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots\dots\dots\dots\dots - a_n x_i^n)(-x_i^2) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_n} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots\dots\dots\dots\dots - a_n x_i^n)(-x_i^n) = 0$$

وبقسمة كل معادلة علي (2-) نحصل علي

$$a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + \dots\dots\dots\dots + a_n \sum x_i^n = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + \dots\dots\dots\dots + a_n \sum x_i^n = \sum x_i y_i$$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 + \dots\dots\dots\dots + a_n \sum x_i^{n+1} = \sum x_i^2 y_i$$

$\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^{n+1} + a_2 \sum x_i^{n+2} + \dots\dots\dots\dots + a_n \sum x_i^{2n} = \sum x_1^n y_i$$

ومن هذه المعادلات يمكن الحصول علي $(a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ وبتعويض هذه القيم في الحدودية

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n x_n$$

نحصل علي الحدودية المطلوبة

مثال:

جد أفضل معادلة متعددة حدود للنقاط التالية

(4,3),(2,1),(0,1),(-3,3)

الحل:

من البيانات المعطي فإن عدد النقاط n=4 ودرجة الحدودية =2 عليه فإن عدد المعادلات المطلوب حلها تكون ثلاثة معادلات أي n+1 والصيغة العامة للمعادلات الثلاثة هي

$$a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \sum x_i^n = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \sum x_i^n = \sum x_i y_i$$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \sum x_i^{n+1} = \sum x_i^2 y_i$$

ومن البيانات المعطي نستطيع الحصول علي المجاميع الواردة في المعادلات أعلاه

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
-3	3	9	-27	81	-9	27
0	1	0	0	0	0	0
2	1	4	8	16	2	4
4	3	16	64	256	12	48
$\sum x = 3$	8	29	45	353	5	79

وبتعويض قيم هذه المجاهيل في المعاملات المذكورة أعلاه نتحصل علي

$$4a_0 + 3a_1 + 29a_2 = 8$$
$$3a_0 + 29a_1 + 45a_2 = 5$$
$$29a_0 + 45a_1 + 353a_2 = 79$$

وبحل نظم المعادلات أعلاه نجد أن

$a_0 = 0.850519$ $a_1 = 0.192495$ $a_3 = 0.178462$

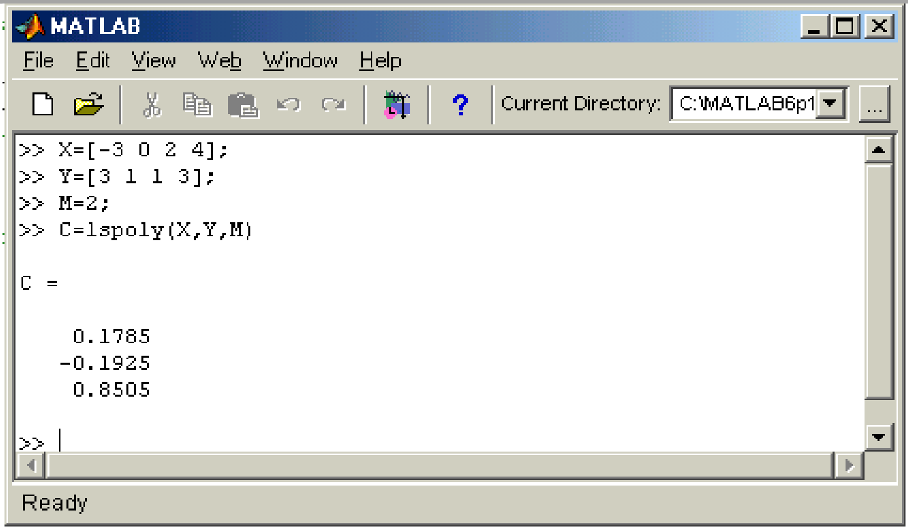
وعليه فإن متعددة الحدود تكون

$$Y = 0.178462x^2 - 0.192495x + 0.850519$$

باستخدام الـ Matlab

```
function C=lspoly(X,Y,M)
%Input  -X is the 1xn abscissa vector
% -Y is the 1xn ordinate vector
% -M is the degree of the least-square polynomial
% -c is the coefficient list for the polynomial
n=length(X);
B=zeros(1:M+1);
F=zeros(n,M+1);
%Fill the columns of F with the powers of X
for k=1:M+1
 F(:,k)=X'.^(k-1);
end
%solve the linear system
A=F'*F;
B=F'*Y';
C=A\B;
C=flipud(C);
```

ولحل المثال المذكور في هذا الجزء



مثال:

جد أفضل معادلة متعددة الحدود من الدرجة الثالثة للبيانات الأتية:

X_i	-4	-2	-2	0	1	3	4	6
Y_i	-35.1	15.1	15.9	8.9	0.1	0.1	21.1	135

الحل:

من البيانات المعطي فإن عدد النقاط n=8 ومن الدرجة المطلوبة فإن n=3

لذا فإن عدد المجاهيل n+1 والذي يساوي عدد المعادلات.

$$n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{8} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{8} x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^{8} x_i^3 = \sum_{i=1}^{8} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{8} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{8} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{8} x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^{8} x_i^4 = \sum_{i=1}^{8} x_i y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{8} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{8} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{8} x_i^4 + a_3 \sum_{i=1}^{8} x_i^5 = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{8} x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^{8} x_i^4 + a_2 \sum_{i=1}^{8} x_i^5 + a_3 \sum_{i=1}^{8} x_i^6 = \sum_{i=1}^{8} x_i^3 y_i$$

ومن البيانات المعطاة نستطيع الحصول علي جميع المجاميع الواردة في المعادلة أعلاه كما يلي:

x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_i^5	x_i^6	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	$x_i^3 y_i$
-4	10	-64	256	-1024	4096	-35.1	140.4	-561.6	22246.4
-2	-4	-8	16	-32	64	15.1	-30.2	60.4	-120.8
-1	1	-1	1	-1	1	15.9	-15.9	15.9	-15.9
0	0	0	0	0	0	8.9	8.9	0	0
1	1	1	1	1	1	0.1	0.1	0.1	0.1
3	9	27	18	243	729	0.1	0.3	0.9	2.7
4	16	64	256	1024	4096	21.1	8464	337.6	1350.4
6	36	216	1296	7776	446656	135	810	4860	29160
$\sum x_i = 7$	83	235	1904	7987	55643	161.1	98901	47133	32622.9

وبتعويض قيم هذه المجاهيل في المعادلات المذكورة نتحصل علي:

$$8a_0 + 7a_1 + 83a_2 + 235a_3 = 161.1$$
$$7a_0 + 83a_1 + 235a_2 + 1907a_3 = 989.1$$
$$83a_0 + 235a_1 + 1907a_2 + 7987a_3 = 4713.3$$
$$235a_0 + 1907a_1 + 7987a_2 + 55643a_3 = 32622.9$$

ويمكن حل منظومة المعادلات الخطية أعلاه عن طريق قاوس للحذف كالأتي:

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 & 83 & 235 \\ 7 & 83 & 235 & 1907 \\ 83 & 235 & 1907 & 7987 \\ 235 & 1907 & 7987 & 55643 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 161.1 \\ 989.1 \\ 4713.3 \\ 32622.9 \end{bmatrix}$$

عليه نجد

$a_0 = 9.0110443$

$a_1 = -8.9661434$

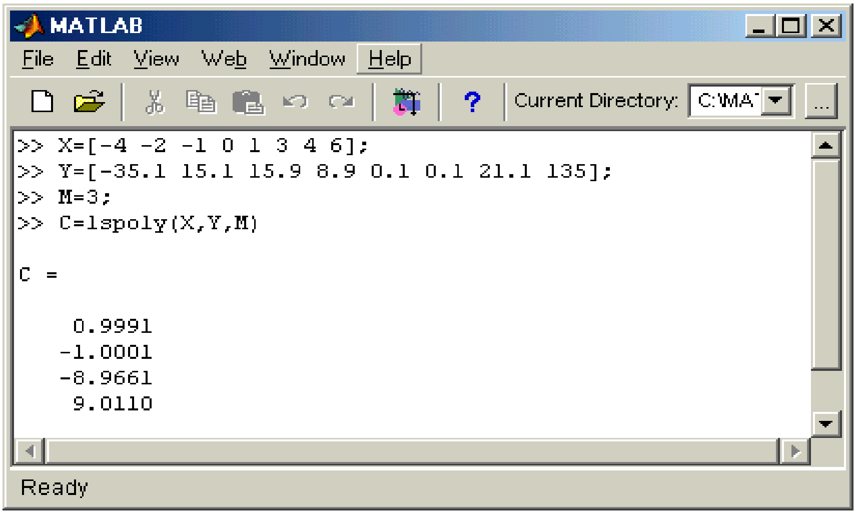
$a_2 = -1.0000942$

$a_3 = 0.99907431$

عليه فإن المعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة

$$0.99907431x^3 - 1.0000942x^2 - 8.9661434x - 9.0110443 = 0$$

باستخدام نفس البرنامج يمكن حل المثال أعلاه



ملحوظة:

يمكن أيضاً إستخدام الدالة polyfit لإيجاد معاملات الحدودية والتي لها الصيغة: polyfit(X,Y,n) حيث X,Y متجهين يحتويان النقاط المعطاة و n تمثل رتبة كثيرة الحدود

```
>> X=[0 1 1 2 3 4 2 5];
>> Y=[3 4 6 9 11 15 10 16];
>> n=1;
>> polyfit(X,Y,n)

ans =

    2.7949    2.9615
```

ولحل المثال الثاني في الدوال غير الخطية بإستخدام الدالة polyfit

```
>> X=[-4 -2 -1 0 1 3 4 6];
>> Y=[-35.1 15.1 15.9 8.9 0.1 0.1 21.1 135];
>> n=3;
>> polyfit(X,Y,n)

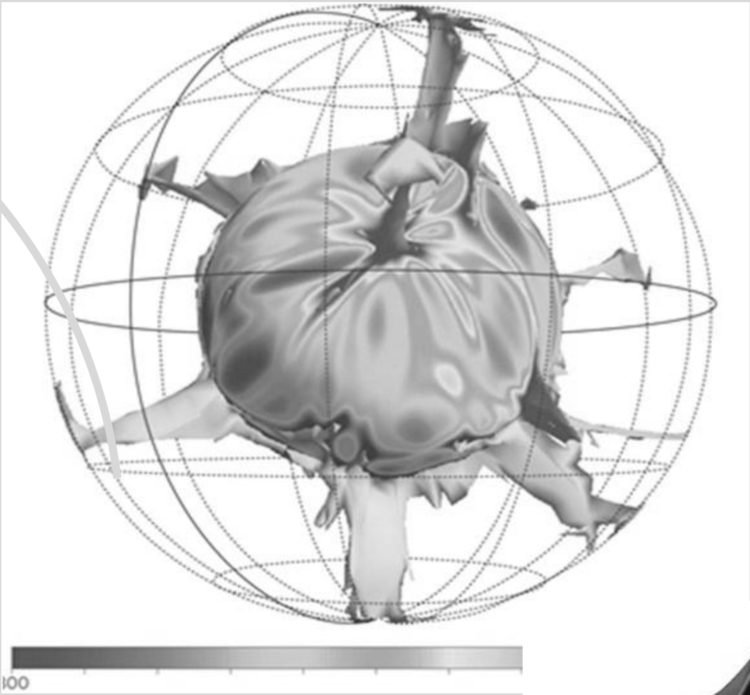
ans =

    0.9991   -1.0001   -8.9661    9.0110
```

الفصل الخامس

التفاضل والتكامل العددي

Numerical Of Differentiation and Integration



5

MATLAB

The Language of Technical Computing

التحليل العددي باستخدام لغة الماتلاب

الفصل الخامس

التفاضل والتكامل العددي

Numerical Of Differentiation and Integration

1-5 التفاضل العددي Numerical Of Differentiation

يعتبر التفاضل العددي هو البديل الوحيد للتفاضل الرياضي خاصة عندما يصعب تفاضل الدالة أو يعبر عنها بقيم مرتبة في شكل جدول عند بعض النقاط المتساوية المسافات فيما بينها والمطلوب منا الآن أن نحسب الصيغة العددية للمشتقة $f'(x)$ عند أحد نقاط الجدول أو نقطة غيرها ، والصيغ العددية للمشتقات تعتبر مهمة جداً في تطوير الخوارزميات في حل مسائل الشروط الحدودية(Boundary Value Problem) للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية.

نتناول في هذا الجزء بعض الصيغ العددية التي تعطي قيماً تقريبية للمشتقة الأولي $f'(x)$ والمشتقة الثانية $f''(x)$ والمشتقات الأعلى

من صيغة سلسلة تايلور للدالة $f(x)$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + ...$$

وبإهمال الحدود التي تلي الحد الثاني من السلسلة نحصل علي

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x)$$

وبوضع $f'(x)$ في الطرف الإيسر نحصل علي

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تسمي المعادلة أعلاه بالتقريب الفرقي الأمامي للمشتقة الأولي $f'(x)$
(Forward-Difference Approximation)

كذلك عند تعويض h بالعدد $-h$ في سلسلة تايلور نتحصل علي التقريب الأتي

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - ....$$

وبإهمال الحدود التي تلي الحد الثاني في السلسلة أيضاً نتحصل علي

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x)$$

وبوضع $f'(x)$ في الطرف الإيسر نحصل علي

$$f'(x) \cong \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

والذي يسمي بالتقريب الفرقي الخلفي للمشتقة الأولي (Backward-Difference Approximation)

بطرح المعادلتين أدناه

$$f(x-h) \cong f(x) - hf'(x)$$
$$f(x+h) \cong f(x) + hf'(x)$$

يمكن أن نحصل علي التقريب الآتي

$$f'(x) \cong \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right]$$

والذي يسمي بالتقريب الفرقي المركزي Difference approximation central للمشتقة الاولى.

وإذا ابتدأنا بثلاثة حدود من سلسلة تايلور فإننا سنحصل علي التقريب الفرقي المركزي للمشتقة الثانية $f''(x)$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x)\text{.........(1)}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x)\text{.........(2)}$$

وبجمع (1) و(2) نحصل علي:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x)$$

وبوضع $f''(x)$ في الطرف الإيسر نحصل علي:

$$f''(x) = \frac{1}{2^h}\left[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\right]$$

وهو التقريب الفرقي المركزي للمشتقة الثانية.

2-5 تقريب المشتقة Approximating The Derivative

نجد من تعريف المبادي الأولية للمشتقة الأولي للدالة $f(x)$ أن

$$f'(x) \cong \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

نختار متتالية $\{h_k\}$ حيث $h \to 0$ نحسب نهاية المتتالية

$$Dk = \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} \qquad k = 1,2,3,\text{........} \qquad (2)$$

يلاحظ القاري أننا سنحسب فقط الأعداد المنتهية لـ $D_1, D_2, \text{.........}, D_n$ في المتتالية (2) يجب استخدام D_n للحصول علي الإجابة ولكن ينتج السؤال التالي لماذا نحسب $D_1, D_2, \text{........}$ وبصورة مكافئة نستطيع أن نسأل ما هي قيمة h_N التي نستطيع اختيارها لكي تكون D_N تقريب جيد لقيمة $f'(x)$ للإجابة علي هذا السؤال يجب أن ننظر للمثال أدناه

مثال:

لتكن لدينا الدالة $f(x)=e^x$ ونستخدم الخطوة $h=1\ ,\frac{1}{2}\ and\ \frac{1}{4}$ لتكوين الخط القاطع (Secant Line) بين النقاط $(0,1)$ و $(h,f(h))$ حيث h تأخذ قيم صغيرة القاطع يقترب من الميل (Tangent Line)، للحصول علي قيمة عددية مقبولة لقيمة h المأخوذة نحسب

$$D_k=\frac{e^{1+h_k}-e}{h_k}$$

والجدول أدناه يمثل القيم المحسوبة

h_k	$f_k=f(1+h_k)$	f_k-e	$D_k=(f_k-e)/h_k$
$h_1=0.1$	3.004166024	0.285884196	2.858841960
$h_2=0.01$	2.745601015	0.027319187	2.731918700
$h_3=0.001$	2.721001471	0.002719642	2.719642000
$h_4=0.0001$	2.718553670	0.000271842	2.718420000
$h_5=0.00001$	2.718309011	0.000027183	2.718300000
$h_6=10^{-6}$	2.718284547	0.000002719	2.719000000
$h_7=10^{-7}$	2.718282100	0.000000272	2.720000000
$h_8=10^{-8}$	2.718281856	0.000000028	2.800000000
$h_9=10^{-9}$	2.718281831	0.000000003	3.000000000
$h_{10}=10^{--10}$	2.18281828	0.000000000	0.000000000

في المثال أعلاه حسبنا قيمة D_k باستخدام الخطوة $h_k=10^{-k}$ لكل $k=1,2,3,....,10$ القيم الكبيرة لـ h_k من مثل $h_1=0.1$ لا تنتج تقريب جيد للمشتقة $D_1=f'(1)$ و D_k تغيير ميل الخط القاطع المار من نقطتين .

إذا استخدمنا الصيغة (2) حيث أن درجة الدقة الي تسعة خانات عشرية نلاحظ أن h_9 تنتج تقريب D_9 و h_{10} تنتج $D_{10}=0$ إذا كان h_k صغيرة صغراً كافياً (صغيرة جداً) فإن القيم المحسوبة للدوال $f(x+h_k)$ و $f(x)$ تكون قريبة جداً من بعضها البعض ونلاحظ أن $f(x+h_{10})$ و $f(x)$ لهم نفس القيمة.

في المثال السابق القيمة الرياضية للنهاية هي $f'(1)$ حيث

$$f'(1)=2.718281828$$

وهذه القيمة نتحصل عليها باستخدام $h_{10}=10^{-5}$ والتي تعطي التقريب الجيد $D_5=2.7183$.

نلاحظ من خلال المثال السابق أن الحصول علي قيمة النهاية عددياً عملية غير سهلة ، باستخدام المعادلة (2) نحسب المتتالية $\{D_k\}$ حتى نتحصل علي العلاقة $|D_{N+1}-D_N|\geq|D_N-D_{N-1}|$ وهذا يعطي أحسن تقريب (Best Approximation) لمشتقة الدالة $f(x)$ ، إذا طبقنا هذه الخاصية في المثال السابق نجد أن

$$|D_6-D_5|>|D_5-D_4|$$

$$|D_6-D_5|=0.0007>|D_5-D_4|=0.00012$$

إذاً قيمة D_5 هي النتيجة المطلوبة

3-5 **صيغة الفرق المركزي** The Central Difference Formulas

نظرية: (Centered Formula Of order $O(h^2)$)

نفرض أن الدالة $f\in c^3[a,b]$ ولتكن لدينا النقاط $x-h\ ,\ x\ ,\ x+h\in[a,b]$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \qquad (3)$$

يوجد عدد $c=c(x)$ ينتمي الي الفترة $[a,b]$ حيث

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + E_{trunc}(f,h)$$

حيث

$$E_{trunc}(f,h) = -\frac{h^2 f^{(3)}(c)}{6} = O(h^2)$$

الحد E_{trunc} يسمي خطأ الإهمال (Truncation Error)

مثال:

إذا كان $x \in [0.7,1.3]$ $y = \sin x$ كون جدول لقيم الدالة y محسوبة لستة أرقام عشرية عند النقاط المتساوية المسافات في الفترة المذكورة باعتبار حجم الخطوة h=0.1، ثم استخدم هذا الجدول لإيجاد قيمة المشتقة الأولي $f'(x)$ باستخدام الفروق الأمامية والخلفية والمركزية وأحسب الخطأ.

الحل:

بتعويض نقاط الفترة المذكورة في الدالة نتحصل علي الجدول الاتي:

x	$y = \sin x$
0.7	0.644218
0.8	0.717356
0.9	0.783327
1.0	0.841471
1.1	0.891207
1.2	0.932039
1.3	0.963558

وبالتعويض في صيغة الفروق المركزية

$$f'(x) \cong \frac{[f(x+h) - f(x-h)]}{2h}$$

$$f'(x) = \frac{0.891207 - 0.7833}{0.2} = 0.539400$$

وبالتعويض في صيغة الفروق الأمامية

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \frac{0.891207 - 0.841471}{0.1} = 0.49736$$

وبالتعويض في صيغة الفروق الخلفية

$$f'(x) \cong \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$f'(x) = \frac{0.841471 - 0.783327}{0.1} = 0.58148$$

وبمقارنة هذه القيمة التقريبية بالقيمة المضبوطة

$$f'_{Exact}(x) = \cos 1 = 0.540302$$

نلاحظ أن القيمة الأولي الناتجة من صيغة الفروق المركزية هي أدقها والخطأ فيها يساوي

$$E = 0.000902$$

مثال:

لتكن $f(x) = \cos(x)$ استخدم الصيغة (3) مع $h = 0.1, 0.01, 0.001$,0.0001, احسب القيمة التقريبية لـ $f'(0.8)$ ثم قارن النتيجة بالقيمة الصحيحة $f'(0.8) = -\sin 0.8$

الحل: باستخدام الصيغة

$$f'(x) \cong \frac{[f(x+h) - f(x-h)]}{2h}$$ مع $h = 0.01$

نتحصل علي

$$f'(0.8) = \frac{f(081) - f(0.79)}{0.02} \cong \frac{0.689498433 - 0.703845316}{0.02} = -0.717344150$$

وبمقارنة القيمة التقريبية أعلاه بالقيمة المضبوطة نجد أن الخطأ:

E=-0.00011941

والجدول أدناه يمثل القيم التقريبية عند قيم h المعطاة

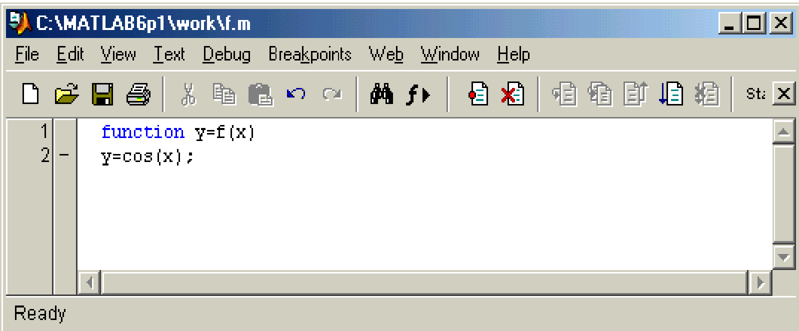
Step Size	Approximation Value
0.1	0.716161095-
0.01	0.717344150-
0.001	0.717356000-
0.0001	0.717360000-

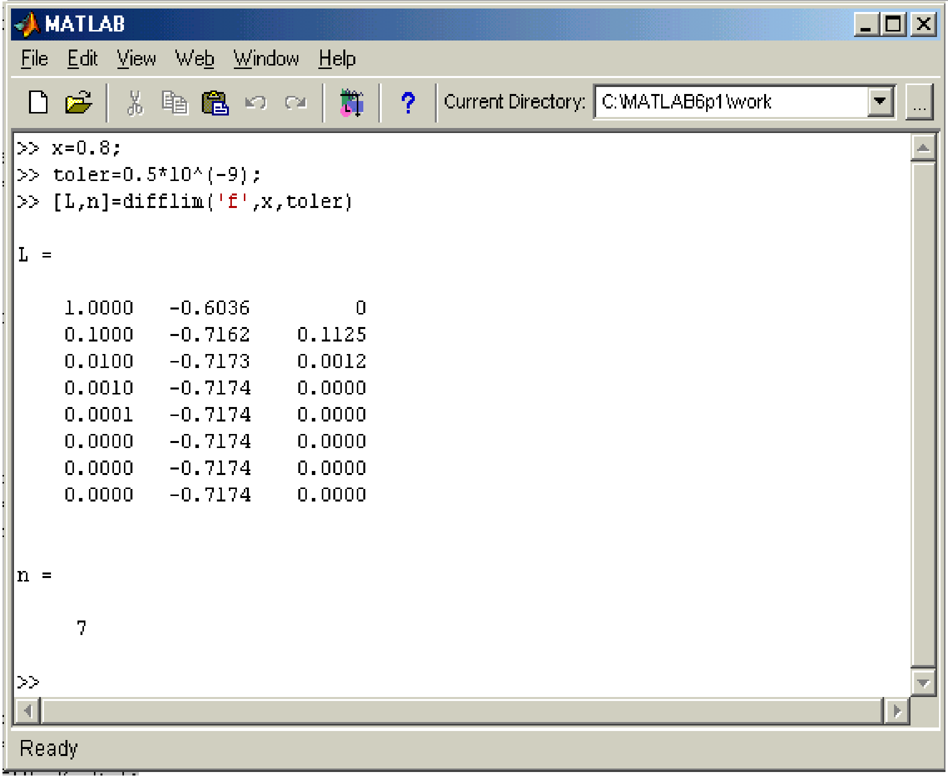
باستخدام الـ Matlab

```
function [L,n]=difflim(f,x,toler)
%Input   -f is the function input as a string 'f'
% -x is the differentiation point
% - toler is the tolerance for the error
%output -L=[H' D' E']:
%-H is the vector of step sizes
%-D is the vector of approximate derivatives
%-E is the vector of error bounds
%-n is the coordinate of the 'best approximation'
max1=15;
h=1;
H(1)=h;
D(1)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
E(1)=0;
R(1)=0;
for n=1:2
    h=h/10;
    H(n+1)=h;
    D(n+1)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
    E(n+1)=abs(D(n+1)-D(n));
```

```
    R(n+1)=2*E(n+1)*(abs(D(n+1))+abs(D(n))+eps);
end
n=2;
while ((E(n)>E(n+1))&(R(n)>toler))&n<max1
    h=h/10;
    H(n+2)=h;
    D(n+2)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
    E(n+2)=abs(D(n+2)-D(n+1));
    R(n+2)=2*E(n+2)*(abs(D(n+2))+abs(D(n+1))+eps);
    n=n+1;
end
n=length(D)-1;
L=[H' D' E'];
```

ولحل المثال المذكور أعلاه يجب أولاً أن نعرف الدالة كالاتي





ومن نافذة الأوامر ندخل المدخلات الآتية

نظرية :

(Centered Formula Of Order O(h^2))

نفـــــــرض أن $f \in C^5[a,b]$ ولـــــــتكـــــــن لـــــــدينا النقـــــــاط $x-2h, x-h, x, x+h, x+2h$ حيث أن هذه النقاط تنتمي الي الفترة $[a,b]$

$$f'(x) \cong \frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h} \qquad (4)$$

يوجد عدد $c = c(x) \in [a,b]$ حيث

$$f'(x) \cong \frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h} + E_{Trunc}(f,h)$$

حيث

$$E_{Trunc}(f,h)=\frac{h^4 f^{(5)}(c)}{30}=O(h^4)$$

مثال:

لتكن $f(x)=\cos(x)$ *باستخدام الصيغة (4) أحسب القيمة التقريبية لـ* $f'(0.8)$ *الي تسعة خانات عشرية قارن القيمة التقريبية المتحصل عليها مع القيمة الحقيقية لـ* $f'(0.8)$.

الحل:

بتطبيق الصيغة (4) مع $h=0.01$ *نتحصل علي*

$$f'(x)\cong\frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h}$$

$$f'(0.8)=\frac{-f(0.82)+8f(0.81)-8f(0.79)+f(0.78)}{0.12}$$

$$\cong\frac{-0.682221207-8(0.689498433)-8(0.703845316)+0.710913538}{0.12}$$

$$\cong -0.717356108$$

والجدول أدناه يمثل القيم التقريبية المحسوبة باستخدام الصيغة (4):

Step Size	Approximation Value
0.1	0.717353703-
0.01	0.717356108-
0.001	0.71735167-
0.0001	0.717360833-

نلاحظ في حالة $h=0.01$ أن الصيغة (4) تعطي تقريب أفضل لقيمة $f'(0.8)$ من الصيغة (3) حيث الخطأ في الصيغة الأولي هو 0.000000017 وفي الصيغة الثانية هو -0.000011941 .

4-5 استقراء Richardson - Richardson's Extrapolation

في هذا الجزء نحاول إيجاد علاقة بين الصيغة

$$f'(x) \cong \frac{[f(x+h) - f(x-h)]}{2h} \cdots\cdots\cdots (*)$$

والصيغة

$$f'(x) \cong \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} \cdots\cdots (*)(*)$$

خذ $f_k = f(x_k) = f(x_0 + kh)$ وإذا رمزنا للقيمة العددية للمشتقة الأولي $f'(x_0)$ التي نتحصل عليها من الصيغة (❖) بالرمز $D_0(h)$ وللقيمة العددية التي نتحصل عليها من الصيغة (❖)(❖) بالرمز $D_0(2h)$ نجد أن:

$$f'(x_0) = D_0(h) + ch^2 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$f'(x_0) = D_0(2h) + 4ch^2 \cdots\cdots\cdots (2)$$

وبضرب العلاقة (1) في (4) وطرحنا الناتج من العلاقة (2) نتحصل علي:

$$3f'(x_0) \approx 4D_0(h) - D(2h) = \frac{4(f_1 - f_{-1})}{2h} - \frac{(f_2 - f_{-2})}{4h}$$

وبوضع $f'(x)$

في الطرف الأيسر نتحصل علي:

$$f'(x_0) = \frac{4D_0(h) - D_0(2h)}{3} = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_2}{12h} \qquad (5)$$

وهذه الصيغة هي الصيغة الفروقية المركزية للصيغة (❖)(❖).

مثال:

إذا كان $f(x) = \cos x$ استخدم الصيغة (1) و (2) مع h=0.01 وضح كيف يمكن حساب $f'(0.8)$ باستخدام العلاقة (3)

الحل:

$$D_0(h) \approx \frac{f(0.81) - f(0.79)}{0.02}$$
$$\approx \frac{0.689498433 - 0.703845316}{0.021} \approx -0.717344150$$

And

$$D_0(2h) \approx \frac{f(0.82) - f(0.78)}{0.04}$$
$$\approx \frac{0.682221207 - 0.710913538}{0.04} \approx -0.717308275$$

وبتطبيق الصيغة $f'(x_0) \approx \frac{4D_0(h) - D_0(2h)}{3}$ نتحصل علي:

$$f'(x) = \frac{4(-0.717344150) - (-0.717308275)}{3} \approx -0.717356108$$

وهي نفس القيمة التي تحصلنا عليها باستخدام العلاقة (❖)(❖) .

وبصورة عامة يمكن تعميم العلاقة (5) لرتب أعلي بالنظرية أدناه:

نظرية: نفرض أن هناك قيمتين تقريبيتين من الرتبة $O(h^{2k})$ للدالة $f'(x_0)$ وهما $D_{k-1}(2h)$ و $D_{k-1}(h)$ والتي تحقق العلاقات الآتية:

$$f'(x_0) = D_{k-1}(h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \dots\dots\dots.$$
$$f'(x_0) = D_{k-1}(h) + 4^k c_1 h^{2k} + 4^{k+1} c_2 h^{2k+2} + \dots\dots\dots.$$

وعليه فإن

$$f'(x_0) = D_k(h) + O(h^{2k+2}) = \frac{4^k D_{k-1}(h) - D_{k-1}(2h)}{4^k - 1} + O(h^{2k+2}).$$

باستخدام الـ Matlab

لتقريب المشتقة $f'(x)$ عددياً نقوم بإنشاء جدول للقيم التقريبية $D(j,k) \quad for \quad k \le j$ وعليه فإن القيمة التقريبية للمشتقة تكون

$$f'(x) \approx D(n,n)$$

التقريبات $D(j,k)$ تنشأ بمصفوفة مثلثية سفلية Lower-Triangular matrix العمود الأول نوجده بالعلاقة:

$$D(j,0) = \frac{f(x+2^{-j}h) - f(x-2^{-j}h)}{2^{-j+1}h}$$

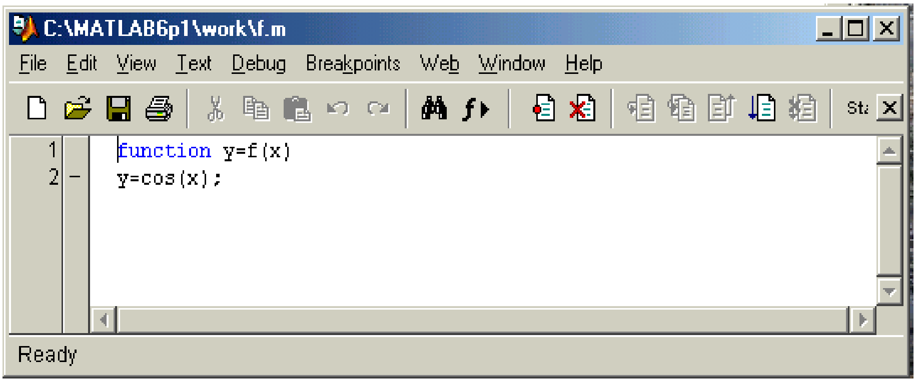
والعناصر في العمود j نوجدها بالعلاقة:

$$D(j,k) = D(j,k-1) + \frac{D(j,k-1) - D(j-1,k-1)}{4^k - 1}$$

$$for \quad 1 \le k \le j$$

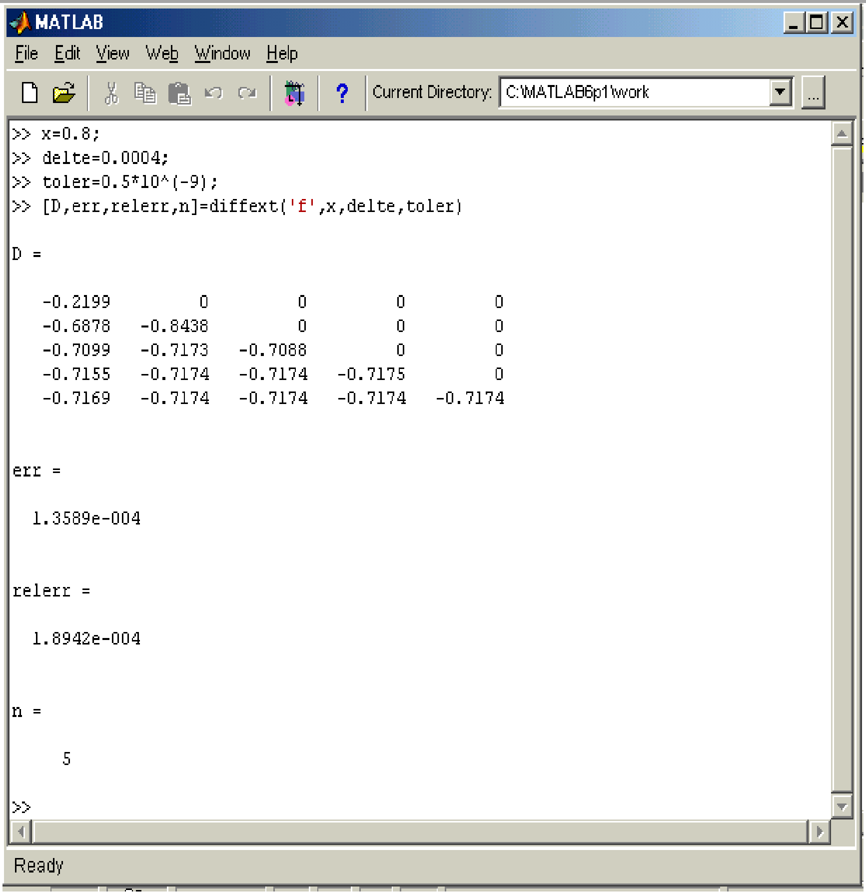
```
function [D,err,relerr,n]=diffext(f,x,delte,toler)
%Input  -f is the function  input as a string 'f'
%-delta is the tolerance for the error
%-toler is the tolerance for the relative error
%Output -D is the matrix of the approximate derivatives
%  -err is the error bound
 % -relerr is the relative error bond
%  -n is the coordinate of the 'best approximation'
err=1;
relerr=1;
h=1;
j=1;
D(1,1)=(feval(f,+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
while relerr>toler & err>delte&j<12
    h=h/2;
```

```
D(j+1,1)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
for k=1:j
D(j+1,k+1)=D(j+1,k)+(D(j+1,k)-D(j,k))/((4^k)-1);
end
err=abs(D(j+1,j+1)-D(j,j));
relerr=2*err/(abs(D(j+1,j+1))+abs(D(j,j))+eps);
j=j+1; end
[n,n]=size(D);
```



ولحل المثال المذكور في هذا الجزء أولاً نعرف الدالة كالأتي:

ومن نافذة الأوامر ندخل المدخلات الآتية لينتج:



5-5 صيغ الفروق المركزية للمشتقات الأعلى More- Central Difference Formulas

الجدول أدناه يوضح صيغ الفروق المركزية للمشتقة الثانية والثالثة والرابعة والتي تم الحصول عليها باستخدام سلسلة تايلور

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} + \frac{h^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{24} + ...(1)$$

وإذا وضعنا $-h$ بدلاً من h نتحصل على:

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} - \frac{h^3 f^{(3)}(x)}{6} + \frac{h^4 f^{(4)}(x)}{24} - ....(2)$$

بجمع (1) و (2) نتحصل علي:

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+\frac{2h^2 f''(x)}{2}+\frac{2h^4 f^{(4)}(x)}{24}+.........$$

وبوضع $f''(x)$ في الطرف الأيسر نتحصل علي :

$$f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}-\frac{2h^2 f^{(4)}(x)}{4!}-\frac{2h^4 f^{(6)}(x)}{6!}-..........-\frac{2h^{2k-2} f^{(2k)}(x)}{(2k)!}$$

وبحذف الحدود التي تلي الحد الأول في الطرف الأيمن نتحصل علي الصيغة الفروقية المركزية للمشتقة الثانية كالأتي:

$$f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

وبنفس الصورة يمكن أن نتحصل علي الصيغ الفروقية المركزية للمشتقة الثالثة والرابعة من الرتبة الثانية $O(h^2)$ والجدول أدناه يوضح ذلك:

difference Formulas of order-Central $O(h^2)$
$f'(x_0)=\frac{f_1-f_{-1}}{2h}$
$f''(x_0)\approx\frac{f_1-2f_0+f_{-1}}{h^2}$
$f^{(3)}\approx\frac{f_2-2f_1+2f_{-1}-f_{-2}}{2h^3}$
$f^{(4)}\approx\frac{f_2-4f_1+6f_0-4f_{-1}+f_{-2}}{h^4}$

مثال:

إذا كان $f(x)=\cos(x)$ $h=0.1,0.01,0.001,0.0001$ احسب $f''(0.8)$ وذلك لتسعة أرقام عشرية.

الحل:

باستخدام الصيغة

$$f''(x_0)\approx\frac{f_1-2f_0+f_{-1}}{h^2}$$

نجد أن

$$f''(0.8)\approx\frac{f(0.81)-2f(0.80)+f(0.79)}{0.0001}$$
$$\approx\frac{0.689498433-2(0.696706709)+0.703845316}{0.0001}\approx-0.696690000$$

والجدول أدناه يوضح القيم التقريبية المحسوبة عند قيم h المقابلة.

Step size	Approximation Value
$h=0.1$	0.69126300
$h=0.01$	-0.696690000
$h=0.001$	-0.696000000

5-6 الصيغ التفاضلية العددية لحدودية نيوتن الإستكمالية

Differentiation Of the Newton Polynomial

رأينا في الفصل السابق (فصل الاستكمال) أنه إذا كان $x_0,x_1,x_2,\dots\dots,x_n$ نقاط عددها n+1 تنتمي للفترة [a,b] فإنه توجد حدودية واحدة $P_n(x)$ من الدرجة $\le n$ تستكمل الدالة $f(x)$ عند النقاط المذكورة وفق العلاقة:

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x) \cdots\cdots\cdots (1)$$

حيث $E_n(x)$ تمثل الخطأ والذي يساوي

$$E_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)...........(x-x_n) \times \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

صيغة نيوتن لهذه الحدودية تعرف بالعلاقة:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + ... + a_n(x-x_0)(x-x_1) + ...$$

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, ..., x_k]$$

فإذا فاضلنا العلاقة (1) فإن مشتقات الحدودية $p_n(x)$ تعد صيغاً تقريبية لمشتقات الدالة $f(x)$ وكلما أخذنا أعداداً مختلفة من النقاط (أي قيماً مختلفة للعدد n) حصلنا على صيغ عددية مختلفة

$$f'(x) = p_n'(x) + E_n'(x)$$

وإذا كانت الحدودية $p_n(x)$ من الدرجة الثانية فإن

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

حيث

$$a_0 = f(x_0) \qquad a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$a_3 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

وباشتقاق المعادلة (1) ينتج أن :

$$p'(x_0) = a_1 + a_2((x-x_0) + (x-x_1))$$

وبإيجاد المشتقة عند النقطة $x = x_0$ نجد أن:

$$p'(x_0) = a_1 + a_2(x_0 - x_1) \approx f'(x) \qquad (2)$$

هنالك ثلاثة حالات للنقاط x_0, x_1, x_2

الحالة الأولى:

إذا كان $x_2 = x + 2h$ $\quad x_1 = x + h$ $\quad x_0 = x$ فإن:

$$a_1 = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$a_2 = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{2h^2}$$

وبتعويض قيمتي الـ a_1 و a_2 نتحصل علي:

$$p'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{-f(x) + 2f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

This is simplified to obtain

$$p'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} \approx f'(x)$$

الحالة الثانية:

إذا كان $x_2 = x - h$ $\quad x_1 = x + h$ $\quad x_0 = x$ فإن:

$$a_1 = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$a_2 = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h^2}$$

وبتعويض قيمتي الـ a_1 و a_2 نتحصل علي:

$$p'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{-f(x) + 2f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

This is simplified to obtain

$$p'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \approx f'(x)$$

الحالة الثالثة:

إذا كان $x_2 = x - 2h \qquad x_1 = x - h \qquad x_0 = x$ فإن:

$$a_1 = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$a_2 = \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{2h^2}$$

وبتعويض قيمتي الـ a_1 و a_2 نتحصل علي:

$$\boxed{p'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} \approx f'(x)}$$

و بصورة عامة

إذا كان $p(x)$ حدودية نيوتن من الدرجة n والتي تقرب الدالة $f(x)$ عند النقاط $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ أي أن:

$$p'(x) = a_0 + a_1((x-x_0) + (x-x_1)) + a_3((x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_2)) + ... + a_n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n-1} (x - x_j)$$

وعند النقطة $x = x_0$ فإن:

$$p'(x) = a_1 + a_2(x_0 - x_1) + a_3(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + ... a_n(x - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)....(x_0 - x_{n-1})$$

مثال:

الجدول أدناه يبين بعض قيم الدالة $f(x) = \cos x$ مقربة لأربعة أرقام

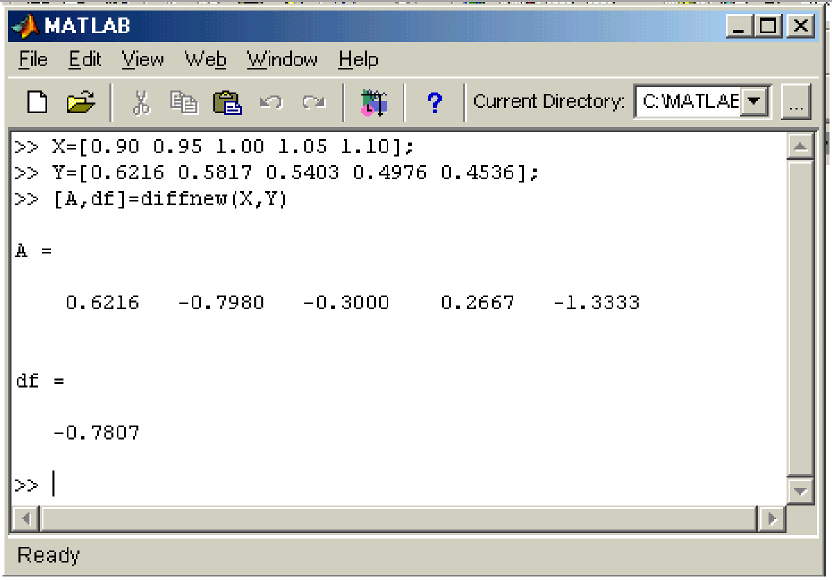
x	$f(x) = \cos x$
0.90	0.6216
0.95	0.5817
1.00	0.5403
1.05	0.4976
1.10	0.4536

أوجد القيمة التقريبية $f'(x_k)$ من الرتبة الثانية $O(h^2)$ ، حاول تطبيق العلاقات التي ذكرناه في هذا الجزء لإيجاد القيمة التقريبية $f'(x_k)$.

باستخدام الـ Matlab

```
function [A,df]=diffnew(X,Y)
%Input-X is the 1xN abscissa vector
%    -Y is the 1xN ordinate vector
%Output   -A is the 1xN vector containing the cofficient of
%-the Nth-degree Newton polynomial
%-df is the approximate derivative
A=Y;
N=length(X);
for j=2:N
    for k=N:-1:j
   A(k)=(A(k)-A(k-1))/(X(k)-X(k-j+1));
    end
end
x0=X(1);
df=A(2);
prod=1;
n1=length(A)-1;
for k=2:n1;
    prod=prod*(x0-X(k));
    df=df+prod*A(k+1));
end
```

ولحل المثال المذكور في هذا الجزء



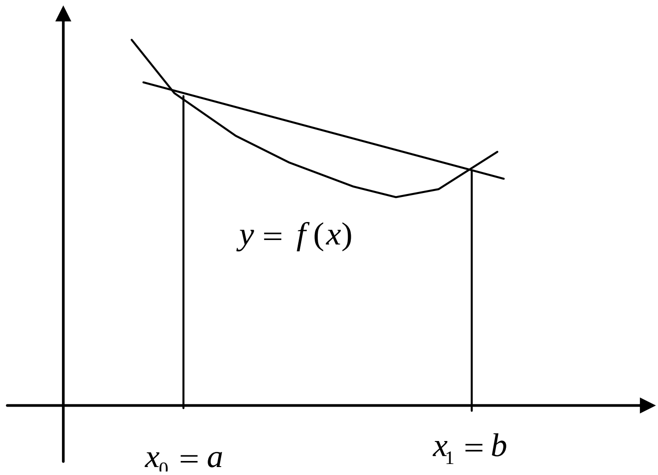
7-5 التكامل العددي Numerical Integration

يدخل التكامل العددي في كثير من التطبيقات الهندسية والفيزيائية ويعرف بأنه المساحة المحصورة بين المنحني والمحور السيني أو المساحة بين المنحني وأي نقطتين في المحور السيني، ففي بعض الأحيان يصعب إيجاد هذا التكامل بالطرق التحليلية المعروفة خاصة في الحالات التي تكون فيها الدالة غير معلومة وإنما نعلم فقط بعض قيم الدالة $f(x)$ عند بعض النقاط المختلفة $i=0,1,2,....,n$ x_i مثل القراءات التي نحصل عليها من تجربة معملية لقيم التيار الكهربي عند أزمنة معينة، ففي هذه الحالة نلجأ الي طرق التحسيب العددي لإيجاد المساحة بصورة تقديرية حسب فترة التسامح المطلوبة للدقة.

في هذا الجزء نتناول بعض من هذه الطرق العددية مثل قاعدة شبه المنحرف (Trapezoidal Rule) وقاعدة سمبسون (Simpson's Rule) وتكامل رومبيرج (Remerge Integration).

1-7-5 **قاعدة شبه المنحرف البسيطة** (Simple Trapezoidal Rule)

تقوم هذه الطريقة بتقريب المساحة الطلوبة تحت منحني الدالة $f(x)$ بالمساحة تحت الخط المستقيم الواصل بين النقطتين علي منحني الدالة عند طرفي منطقة التكامل حيث $x_1 = b$ $x_0 = a$ أي أن الدالة تقرب بمعادلة من الدرجة الأولي أي الخط المستقيم بمعني خط مستقيم والشكل أدناه يوضح ذلك.

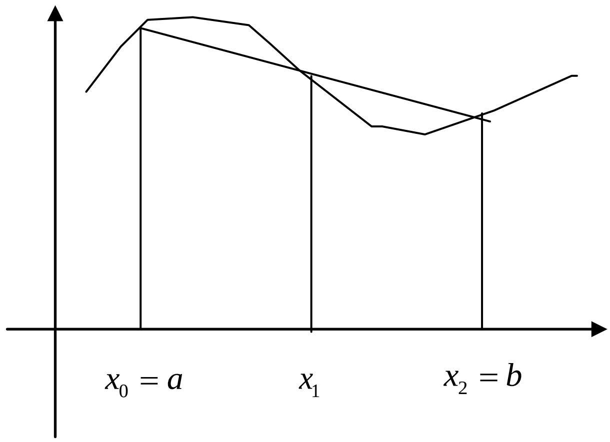


في هذه الحالة فإن قانون شبه المنحرف يكون بالصيغة الأتية:

$$T(f,h) = \int_a^b f(x).dx \cong \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) \qquad h = b - a$$

2-7-5 **قاعدة سمبسون البسيطة**(Simple Simpson's Rule)

تقوم قاعدة سمبسون علي أساس تقسيم المساحة المطلوبة تحت منحني الدالة $f(x)$ بالمساحة تحت منحني حدودية من الدرجة الثانية والشكل أدناه يوضح ذلك



وفي هذه الحالة فان قانون سمبسون يكون بالصيغة

$$s(f,h) = \int_a^b f(x).dx \cong \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$
$$h = \frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{b-a}{2}$$

مثال:

أوجد المساحة A باستخدام قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون وأحسب الخطأ في كل حالة حيث

$$A = \int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 7x - 5).dx$$

الحل:

1) باستخدام قاعدة شبه المنحرف

$$A = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$
$$h = b - a = 3 - 1 = 2$$
$$\therefore A = \frac{2}{2}(f(1) + f(3)) = 1 + 25 = 26$$

2) باستخدام قاعدة سمبسون

$$x_0 = 1 \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

$$f(x_0) = 1 \quad f(x_1) = 9 \quad f(x_2) = 25$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \\ &= \frac{1}{3}(f(1) + 4f(2) + f(3)) \\ &= \frac{1}{3}(1 + 4 \times 9 + 25) = 20\frac{2}{3} \end{aligned}$$

الحل المضبوط يساوي

$$A_{exat} = [\frac{x^4}{4} - 2 \times \frac{x^3}{3} + 7 \times \frac{x^2}{2} - 5x]_1^3 = 20\frac{2}{3}$$

عليه فإن الخطأ الفعلي يساوي

$$E_{trap} = 26 - 20\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$$

$$E_{sim} = 26 - 26 = 0$$

تقدير الخطأ Error Estimates

بالنسبة لقاعدة شبه المنحرف البسيطة فإن تقدير الخطأ يعرف بالعلاقة الأتية:

$$E_t = \frac{-h^3}{12} f''(c) \qquad c \in (x_0, x_1)$$

أما بالنسبة لقاعدة سمبسون البسيطة فإن تقدير الخطأ يعرف بالعلاقة الأتية:

$$E_s = \frac{-h}{90} f^{(4)}(c) \qquad c \in (x_0, x_1)$$

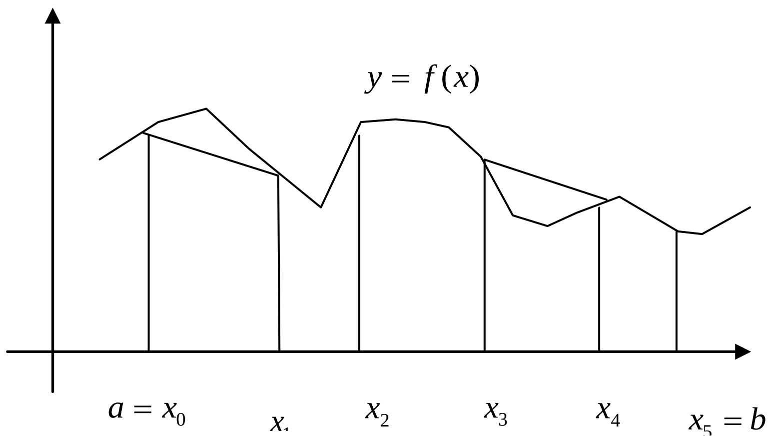
8-5 صيغ التكامل المركبة Composite Integration Formulas

لتقليل الخطأ الناتج من تطبيق صيغتي شبه المنحرف وصيغة سمبسون البسيطة فإننا نقسم فترة التكامل $[a,b]$ الي فترات أصغر وتطبق صيغة التكامل علي كل فترة جزئية (Subinterval) علي حدة والصيغة الناتجة من التطبيق المتكرر تسمي صيغ التكامل المركبة باستخدام صيغة شبه المنحرف وصيغة سمبسون.

1-8-5 قاعدة شبه المنحرف التركيبية Composite Trapezoidal Rule

لإيجاد القيمة التقريبية للتكامل $\int_a^b f(x).dx$

نقوم بتقسيم المساحة المحصورة بين المنحني والنقطتين $[a,b]$ الي عدد M الفترات طول كل فترة يساوي h حيث $h = \dfrac{b-a}{M}$ والشكل أدناه يوضح ذلك



ينتج من هذا التقسيم عدد من الشرائح A_i وأي شريحة تأخذ شكلاً قريباً من شبه المنحرف ويمكن حساب مساحته وفقاً للقاعدة

$$A_i = \left[\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right] \times h$$

المســـاحة الكليـــة التقريبيـــة المحصـــورة بـــين المـــنحني والمســـتقيمين $x = b$ $x = a$ تمثل مساحة جميع الشرائح وتعرف بالصيغة الأتية بالصيغة الأتية

$$\int_a^b f(x).dx \cong \sum_{i=1}^{n} A_i$$

عليه فإن قانون شبه المنحرف التركيبي يعرف بالصيغة الأتية:

$$T(f,h) = \int f(x).dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + h\sum_{i=1}^{M-1} f(x_i)]$$

حيث $x_M = b$ $x_0 = a$ $i = 0,1,2,3,....,M$ $x_i = a + ih$

إن دقة قيمة التكامل تعتمد علي عدد الشرائح الناتجة من تقسيم المساحة تحت المنحني فكلما زادت عدد الشرائح إذداد الجواب دقة.

مثال:

استخدم قاعدة شبه المنحرف التركيبية لإيجاد التكامل

$$\int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 7x - 5).dx$$

وذلك بأخذ

1) $M = 2$ 2) $M = 4$

الحل:

1) عند $M = 2$

$$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1) + h\sum_{i=1}^{M-1} f(x_i)]$$

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$\int_1^3 f(x).dx \approx \frac{1}{2}[f(1) + f(3) + 2\times f(2)]$$

$$= \frac{1}{2}[1 + 25 + 2\times 9] = 22$$

2) عند $M = 4$

$$\int_1^3 f(x).dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1) + 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]]$$

$$h = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A_4 = \frac{1/2}{2}[f(1) + f(3) + 2[f(1.5) + f(2) + f(2.5)]] = 21$$

مثال:

استخدم قاعدة شبه المنحرف التركيبية لحساب التكامل العددي للدالة $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ للمتغير $2 \le x \le 4$ بدقة مرتبتين عشريتين.

الحل:

إذا فرضنا أن $h = 2$ و $2 \le x \le 4$ وإذا عوضنا في الدالة نحصل علي

x	2	4
$f(x)$	1.73	2.24

وبالتعويض في قاعدة شبه المنحرف نحصل علي

$$T(f,h) = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) = \frac{1}{2}(1.73 + 2.24) = 3.97$$

وإذا فرضنا أن $h = 1$ للفترة $2 \le x \le 4$ نحصل علي

x	2	3	4
$f(x)$	1.73	2.0	2.24

وبالتعويض في قاعدة شبه المنحرف التركيبية نحصل علي

$$T(f,h) = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2\times f(x_1) + f(x_2)) = \frac{1}{2}(1.73 + 2\times 2 + 2.24) = 3.985$$

□

وإذا فرضنا أن $h=0.5$ للفترة $2 \le x \le 4$ نحصل علي

x	2	2.5	3	3.5	4
$f(x)$	2.73	1.87	2.0	2.12	2.24

وبالتعويض في قاعدة شبه المنحرف التركيبية نحصل علي

$$T(f,h)=\frac{h}{2}(f(x_0)+2\times f(x_1)+2\times f(x_2)+2\times f(x_3)+f(x_4))$$

$$T(f,h)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}[1.73+2\times 1.187+2\times 2+2\times 2.12+2.24]=3.988$$

ويمكن وضع هذه القيم في الجدول أدناه كالاتي

h	$T(f,h)$
2	3.97
1	3.985
0.5	3.988
0.25	3.989

مثال:

استخدم قاعدة شبه المنحرف لإيجاد تكامل الدالة $f(x)=2+\sin(2\sqrt{x})$

حيث $1 \le x \le 6$ خذ عدد التقسيمات يساوي 11 (أي أن $M=10$)

الحل:

$$h=\frac{b-a}{M}=\frac{6-1}{10}=0.5$$

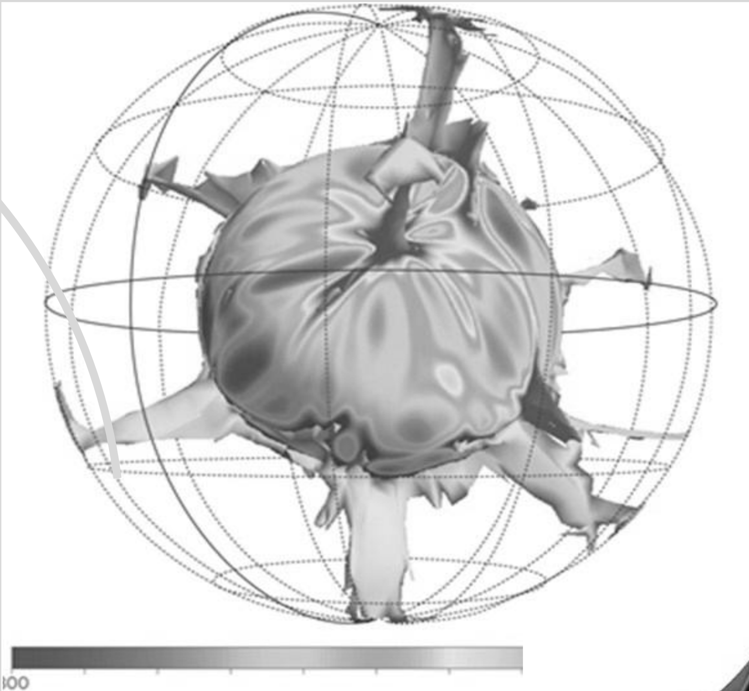
بتطبيق القانون

$$T(f,h)=\frac{h}{2}(f(a)+f(b))+h\sum_{k=1}^{M-1}f(x_k)$$

الفصل السادس

الحل العددي للمعادلات التفاضلية

Numerical Solution of Differential Equations



MATLAB

The Language of Technical Computing

6

الفصل السادس

الحل العددي للمعادلات التفاضلية

Numerical Solution of Differential Equations

1-6 مقدمه :

تعتبر المعادلات التفاضلية من الأدوات الرياضية الهامة في فهم العديد من المسائل الفيزيائية والهندسية والاجتماعية وقد امتدت اهميتها مؤخرا الي حقول العلوم الاقتصادية وظهر ما يسمي بالنمذجة الرياضية، وهناك نوعان من المعادلات التفاضلية:

1. المعادلات التفاضلية العادية Ordinary Differential Equation (ODEs)
2. المعادلات التفاضلية الجزئية Partial Differential Equations (PDEs)

فالمعادلة التفاضلية العادية تحتوي علي متغير مستقل واحد أما المعادلة التفاضلية الجزئية تحتوي علي عدد من المتغيرات المستقلة (مثل درجة الحرارة u(x,t) حيث تعتمد علي الموضع x والزمن t).

نرمز للمعادلة التفاضلية بالرمز $y^{(1)}$ y' $\frac{dy}{dx}$ وحلها يكون بالصيغة

$$y = g(x, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n)$$

حيث c_n عبارة عن ثوابت، ويشمل هذا النوع من المعادلات التفاضلية علي صنفين:

1) مسائل القيم الابتدائية Initial Value Problem:

في هذا النوع تكون للمعادلة التفاضلية شرط ابتدائي (initial Condition) للمتغيرات والشرط الابتدائي يمثل النقطة الابتدائية التي تمر بها الدالة التي تمثل حل المعادلة التفاضلية.

2) مسائل القيم الحديةBoundary Value Problem :

في هذه الحالة يكون للمعادلة التفاضلية شرط ابتدائي وشرط معين عند نهاية الفترة للمتغير المستقل وتمثل هذه الشروط نقطتين يجب أن تمر بهما الدالة التي تمثل حل المعادلة التفاضلية.

في هذا الجزء نتناول بعض الطرق العددية المستخدمة لحل المعادلة التفاضلية العادية مقتصرين علي معادلة الدرجة الأولي التي تكون علي الصيغة:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ذات الشرط الابتدائي

$$y(x_0) = y_0$$

تعتمد الطرق العددية علي معرفة المتغير التابع y في لحظة البدء x_0 ثم ننطلق من هذه النقطة خطوة خطوة إذ نحسب y_1 من أجل $x_0 + h$ و y_2 من أجل $x_0 + 2h$ حيث تمثل h التزايد الذي تأخذه x ويعرف بالصيغة $h = \frac{b-a}{M}$.

2-6 **طريقة اويلر** Euler's Method

تعتمد هذه الطريقة علي إعطاء الثابت h قيماً صغيرة بحيث يمكن حذف حدود سلسلة تايلر إبتداءاً من الحد الذي يحوي $\frac{h^2}{2!} y''(x)$

سلسلة تايلر للنقطة (x+h) تعرف بـ

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + ... + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}$$

.

وبحذف الحدود إعتباراً من الحد $\frac{h^2}{2!}y''(x)$ ينتج أن:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) = y(x) + hf(x,y)$$

نبدأ من النقطة (x_0, y_0) وبالتعويض في العلاقة أعلاه ينتج أن:

$$y_1 = y(x_0 + h)$$
$$= y(x_0) + hy'(x_0)$$

$$y_2 = y(x_0 + 2h)$$
$$= y(x_0) + 2hy'(x_0)$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad n = 0,1,2,3,\ldots..M-1$$

إي أن الصيغة العامة لقانون اويلر هي:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$
$$x_n = x_0 + nh \qquad n = 0,1,2,3,\ldots..M-1$$

مثال:

أوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية $y' = x + y$ حيث $y(0) = 0$ خذ $h = 0.2$ في الفترة [0,1].

الحل

باستخدام القانون $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ من الشرط $y(0) = 0$ ينتج $y_0 = 0 \quad x_0 = 0$ بالتعويض في القانون أعلاه نجد أن

$f(x_n, y_n) = x_n + y_n \qquad x_n = x_0 + nh = nh$

$y_1 = y_0 + 0.2(x_0 + y_0) = 0$

$y_2 = y_1 + 0.2(x_1 + y_1) = 0 + 0.2(0.2 + 0) = 0.4$

$y_3 = y_2 + 0.2(x_2 + y_2) = 0.4 + 0.2(0.4 + 0.04) = 0.128$

$y_4 = y_3 + 0.2(x_3 + y_3) = 0.128 + 0.2(0.6 + 0.128) = 0.274$

$y_5 = y_4 + 0.2(x_4 + y_4) = 0.48 + 0.2(0.8 + 0.489) = 1.747$

n	$x_n = 0.2n$	$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n)$
0	0	0
1	2 .0	04 .0
2	4 .0	128 .0
3	6 .0	271 .0
4	8 .0	489 .0
5	1	747 .1

مثال:

أوجد الحل التقريبي لمسالة الشرط الابتدائي

$y' = -y + x + 1 \qquad 0 \le x \le 1 \;\; and \quad y(0) = 1$

ثم قارنه بالحل الصحيح $y = x + e^x$

(نقصد بالمقارنة إيجاد الخطأ المرتكب ويمثل القيمة المطلقة للفرق بين الحل الصحيح والحل التقريبي) أي أن $E = |y_{n+1} - z_{n+1}|$

الحل

$$x_n = x_0 + nh \qquad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

$$f(x_n, y_n) = -y_n + x_n + 1$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.1(-y_n + x_n + 1)$$

$$y_1 = y_0 + 0.1(-y_0 + x_0 + 1) = 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1$$

$$y_2 = y_1 + 0.1(-y_1 + x_1 + 1) = 1 + 0.1(-1 + 0.1 + 1) = 1.01$$

وهكذا نتحصل علي القيم التقريبية الموضحة في الجدول أدناه

n	x_n	$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n)$
0	0	1
1	1 .0	01 .1
2	2 .0	029 .1
3	3 .0	016100 .1
4	4 .0	90490 .1
5	5 .0	131441 .1
6	6 .0	78297 .1
7	7 .0	230467 .1
8	8 .0	287420 .1
9	9 .0	348578 .1

وللمقارنة بين الحل التقريبي والحل الصحيح

$$Z_{n+1} = x_n + e^{(-x_n)}$$

$$Z_1 = x_0 + e^{x_0} = 0 + e^0 = 1$$

$$Z_2 = x_1 + e^{x_1} = 0.1 + e^{-0.1} = 1.04837$$

$$Z_3 = x_2 + e^{x_2} = 0.2 + e^{(-0.2)} = 1.018731$$

$$Z_4 = x_3 + e^{(-x_3)} = 0.3 + e^{(-0.3)} = 10.40818$$

وهكذا نتحصل علي بقية القيم الصحيحة

n	y_{n+1}	Z_{n+1}	$Error = \lvert y_{n+1} - Z_{n+1} \rvert$
0	1	1	00000 .0
1	01 .1	04837 .1	03837 .0
2	029 .1	048731 .1	0217631 .0
3	016100 .1	040818 .1	024718 .0
4	90490 .1	070320 .1	16542 .0
5	131441 .1	06531 .1	066131 .0
6	78297 .1	148812 .1	634158 .0
7	230467 .1	196585 .1	033883 .0
8	287420 .1	249329 .1	038091 .0
9	348578 .1	306570 .1	042008 .0

الخوارزمية:

To approximate the solution of initial value problem $y' = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$ where $a \le x \le b$ at, $N+1$ equally special number in the interval [a, b]

Input:

End point [a, b]

Integer N initial condition

Output: approximation Y at the M+1 value of x

Step1: set $h = \frac{(b-a)}{M}$ x = x_0 , y = y_0

Output (x, y)

Step 2:

For I= 0, 1, 2, 3,……, N Do step 3, 4

Step 3:

Set y = y + h*f(x, y)

x = a + n*h(compute x_i)

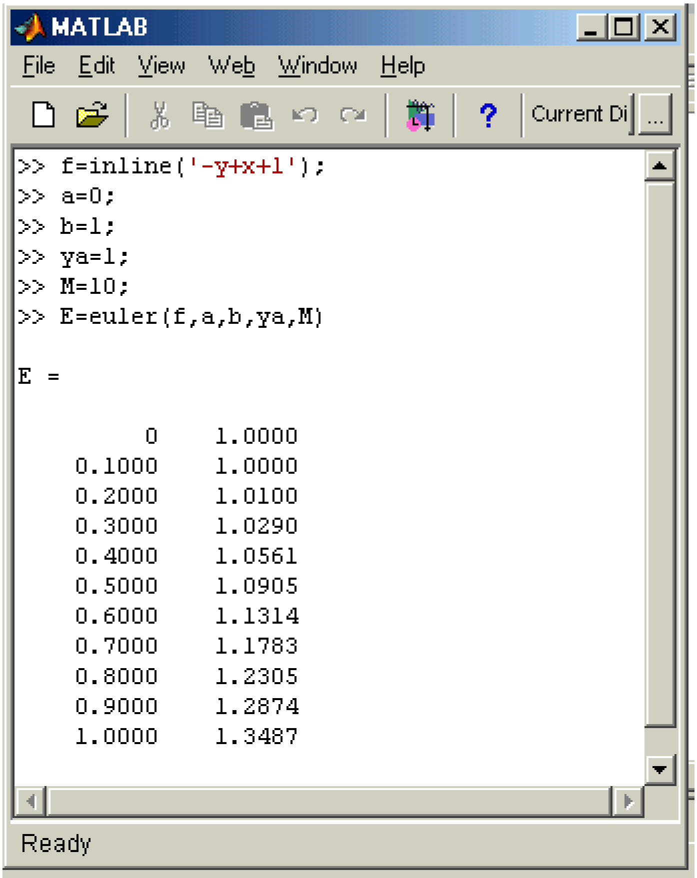
step 4:

out put (x, y)

بإستخدام الـ Matlab

```
function E=euler(f,a,b,ya,M)
%Input   -f is the function entered as astring 'f'
%   -a and b are the left and right end points
%   -ya is the initial condition y(a)
%   -M is the number of steps
%Output  -E=[T' Y'] where T is the vector of abscissas and
%Y is the Vector of ordinates
h=(b-a)/M;
T=zeros(1,M+1);
Y=zeros(1,M+1);
T=a:h:b;
Y(1)=ya;
for j=1:M
Y(j+1)=Y(j)+h*feval(f,T(j),Y(j));
end
E=[T' Y'];
```

ولحل المثال الثاني



3-6 **طريقة سلسلة تايلر** Taylor series method:

اذا كانت الحاجة لا يجاد حل للمعادلة التالية $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ على ان يمر الحل بالنقطة (x0,y0) الذي يمثل الشرط الابتدائي الذي يصعب مكاملة المعادلة (لايجاد حلها) فان متسلسلة تايلر تعطي الجواب على الشكل

$$y_1 = y_0 + (x - x_0)\, y_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\, y'_0 + \frac{(x - x_0)}{3!}\, y'''_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وبصـورة عامـة فـان الحـل العـددي في النقطـة x+h يعتمـد علـى قـيم $y(x), y'(x), y''(x),...$ كما وهـذه المشـتقات يـتم حسـابها مـن المعادلـة التفاضـلية المطلوب إيجاد حلها وهي $y' = f(x, y)$ ، .

وتستخدم هذه الطريقة في الحالات التي يكون بالإمكان الحصول علي تفاضل الدالة رياضياً وتمتاز علي بعض الطرق الأخرى بأنها لا تتأثر بخطأ التدوير (وهو الخطأ الناشئ من استخدام عدد محدد من المراتب المعنوية) مثلما تتأثر الفروق المستخدمة في الطرق المذكورة ويمكن استخدام h كبيرة نوعاً ما.

ويمكن تعميم العلاقة (1) لسلسلة تايلر من الرتبة n بالصورة:

$$y_{n+1} = y_n + hT^{(n)}(x_n, y_n) \quad for \quad each \quad n = 0,1,2,......, M-1$$

حيث

$$T(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n) + ... + \frac{h^{(n-1)}}{n!} f^{(n-1)}(x_n, y_n)$$

مثال:

أوجد الحل التقريبي لمسالة الشرط **الابتدائي**

$$y' = -y + x + 1 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 1$$

باستخدام طريقة تايلر من الرتبة الثانية والرتبة الرابعة.

الحل

أولاً:

$$y_{n+1} = y_n + hT^2(x_n, y_n)$$

$$T^2(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n)$$

$$f(x_n, y_n) = -y_n + x_n + 1$$

$$f'(x_n, y_n) = -y'_n + 1 = y_n - x_n$$

$$\therefore T^{(2)} = -y_n + x_n + 1 + \frac{h}{2}(y_n - x_n) = (1 - \frac{h}{2})(x_n - y_n) + 1$$

$$\therefore y_{n+1} = y_n + h[(1 - \frac{h}{2})(x_n - y_n) + 1] \qquad n = 0,1,2,....., M-1$$

$$y_1 = y_0 + 0.1[(1 - \frac{0.1}{2})(x_n - y_n) + 1] \qquad (*)$$

$$= 0 + 0.1[(1 - \frac{0.1}{2})(0 - 1)] = 1.00500$$

$$y_2 = y_1 + 0.1[(1 - \frac{0.1}{2})(x_1 - y_1) + 1]$$

$$= 1.00500 + 0.1[(1 - \frac{0.1}{2})(0.1 - 1.00500) + 1] = 1.019025$$

وهكذا نتحصل علي بقية القيم حتى y_9 والجدول أدناه يوضح القيم المحسوبة

ثانياً:

باستخدام طريقة تايلر من الرتبة الرابعة

$$y_{n+1} = y_n + hT^4(x_n, y_n) \qquad (*)(*)$$

حيث

$$T^4(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{3!} f''(x_n, y_n) + \frac{h^3}{4!} f'''(x_n, y_n)$$

$$f(x_n, y_n) = -y_n - x_n + 1$$

$$f'(x_n, y_n) = -y'_n + 1 = y_n - x_n - 1 + 1 = y_n - x_n$$

$$f''(x_n, y_n) = -y_n + x_n$$

$$f'''(x_n, y_n) = y_n - x_n$$

بالتعويض في العلاقة

$$T^4(x_n,y_n)=f(x_n,y_n)+\frac{h}{2}f'(x_n,y_n)+\frac{h^2}{3!}f''(x_n,y_n)+\frac{h^3}{4!}f'''(x_n,y_n)$$

نجد أن

$$T^4(x_n,y_n)=1+(1-\frac{h^3}{24}+\frac{h^2}{6}-\frac{h}{2})(x_n-y_n)$$

وبالتعويض في صيغة سلسلة تايلر (❖) نجد أن:

$$y_{n+1}=y_n+h[1+(1-\frac{h^3}{24}+\frac{h^2}{6}-\frac{h}{2})(x_n-y_n)] \qquad (*)(*)(*)$$

ملحوظة:

يمكن كتبة المعادلتين (❖) و (❖)(❖) بدلالة h,I كيف؟ إذا كان n=10 فإن h=0. 1 و $x_n=nh$ بالنسبة لسلسة تايلور من الرتبة الثانية

$$y_{n+1}=y_n+[(1-\frac{h}{2})(x_n-y_n)+1]$$
$$=y_n+0.1[0.95(0.1n-y_n)+1]$$
$$\therefore y_{n+1}=0.905y_n+0.0095n+0.1$$

وبالنسبة لصيغة تايلر من الرتبة الرابعة تصبح

$$y_{n+1}=y_n+h[(1-\frac{h^3}{24}+\frac{h^2}{6}-\frac{h}{2})(x_n-y_n)+1]$$
$$=y_n+0.1[(1-\frac{0.01}{24}+\frac{0.01}{6}-\frac{0.1}{2})(0.1n-y_n)+1]$$
$$\therefore y_{n+1}=0.9048375y_n+0.00951625n+0.1$$
$$for \quad each \quad n=0,1,2,3,.........,9$$

والجدول يمثل القيم المحسوبة في الحالتين

x_n	Taylor method Of order tow	Taylor method of Order four
00 .	00000 .0	00000 .1
1 .0	00500 .1	0048375 .1
2 .0	09025 .1	0187309014 .1
3 .0	041218 .1	0408184220 .1
4 .0	070802 .1	0703202889 .1
5 .0	107076 .1	1005309344 .1
6 .0	149404 .1	488119344 .1
7 .0	……..	……….
8 .0	………	……….
9 .0	………	……….

حاول إيجاد بقية القيم؟

ملحوظة:

1) يمكن اعتبار أن طريقة أويلر هي طريقة تايلر من الرتبة الأولي.

2) كلما كانت درجة تايلر أكبر (من رتب أعلي مثلاً الرتبة الخامسة السادسة. . . . . . .) كانت درجة الدقة اكبر.

مثال:

استخدم طريقة تايلر من الدرجة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{(x-y)}{2}$$

في الفترة [0,3] والشرط الابتدائي y(0)=1 وبقيم $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ، ثم قارن النتيجة بالحل الصحيح $y = 3e^{-x/2} - 2 + x$

الحل

باستخدام قانون سلسلة تايلر من الرتبة الرابعة

$$y_{n+1} = y_n + hT^4(x_n, y_n)$$ حيث

$$T^4(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{3!} f''(x_n, y_n) + \frac{h^3}{4!} f'''(x_n, y_n)$$

$$f(x_n, y_n) = \frac{(x-y)}{2}$$

$$f'(x_n, y_n) = \frac{1-y'}{2} = \frac{(1-(x-y)/2)}{2} = \frac{2-x+y}{4}$$

$$f''(x_n, y_n) = \frac{0-1+y'}{4} = \frac{-1+(x-y)/2}{4} = \frac{-2+x-y}{8}$$

$$f'''(x_n, y_n) = \frac{-0+1-y'}{8} = \frac{1-(x-y)/2}{8} = \frac{2-x+y}{16}$$

$$f(x_n, y_n) = \frac{(0.0-1.0)}{2} = -0.5$$

$$f'(x_n, y_n) = \frac{2.0-0.0+1.0}{2} = 0.75$$

$$f''(x_n, y_n) = \frac{-2.0+0.0+1.0}{8} = -0.375$$

$$f'''(x_n, y_n) = \frac{2-0.0+1.0}{16} = 0.1875$$

وبالتعويض في العلاقة (❖) نتحصل علي:

$$y_1 = 1.0 + 0.25(-0.5 + 0.25(\frac{0.75}{2} + 0.25(\frac{-0.3575}{6} + 0.5\frac{0.1875}{24}))) = 0.8974915$$

ولإيجاد y_2 عند النقطة $(x_1, y_1) = (0.25, 0.897495)$

$$f(0.25,0.8974915) = \frac{0.25 - 0.8974915}{2} = -0.3237458$$

$$f'(0.25,0.8974915) = \frac{2 - 0.25 + 0.8974915}{4} = 0.6618729$$

$$f''(0.25,0.8974915) = \frac{-2.0 + 0.25 - 0.8974915}{8} = 0.3309364$$

$$f'''(0.25,0.8974915) = \frac{(2.0 - 0.25 + 0.8974915)}{16} = 01654682$$

وبالتعويض في القانون (❖) نتحصل علي

$$y_2 = 0.8974915 + 0.25(-0.3237458 + 0.25(\frac{0.6618729}{2} + 0.25(\frac{0.1654682}{24}))) = 0.8364037$$

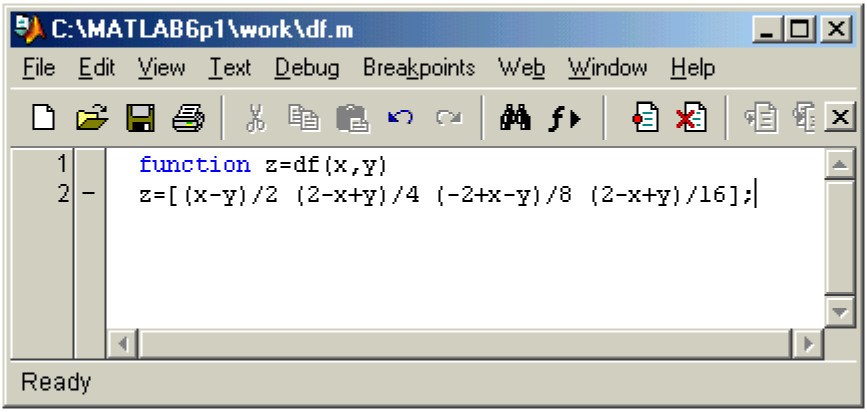
وهكذا نتحصل علي بقية القيم والجدول أدناه يوضح القيم المحسوبة عند قيم h المعطي

x_n	y_{n+1}				Z_{n+1}
	$h=1$	$h=\frac{1}{2}$	$h=\frac{1}{4}$	$h=\frac{1}{8}$	
0	0 .1	0 .1	0 .1	0 .1	0 .1
125 .1				9432392 .0	9432392 .0
25 .0			8974915 .0	8974908 .0	8974917 .0
375 .0				8620874 .0	8620874 .0
50 .0		8364258 .0	83644037 .0	8364024 .0	8364023 .0
75 .0			8118696 .0	8118679 .0	8118678 .0
00 .1	8203125 .0	8196285 .0	8195940 .0	8195921 .0	8195920 .0
50 .1		9171423 .1	9171021 .0	9170998 .0	9170997 .0
00 .2	1045125 .1	1036826 .1	1036408 .1	1036385 .1	1036383 .1
50 .2		3595575 .1	3595168 .1	3595145 .1	3595144 .1
00 .3	6701860 .1	6694308 .1	6693928 .1	6693906 .1	6693905 .1

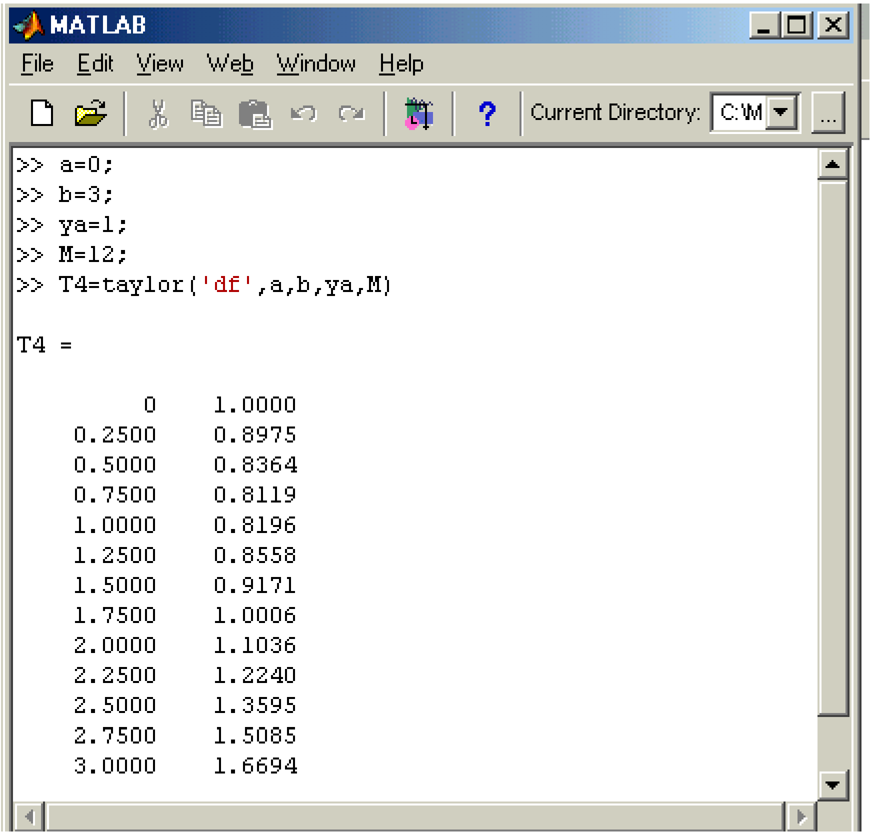
باستخدام الـ Matlab

```
function T4=taylor(df,a,b,ya,M)
%Input   -df=[y' y'' y''' y''''] entered a string 'df'
%where y'=f(t,y)
%   -a and b are the left and right end points
%   -ya is the initial condition y(a)
%   -M is the number of steps
%Output  -T4=[T' Y']
%   Y is the Vector of ordinates
h=(b-a)/M;
T=zeros(1,M+1);
Y=zeros(1,M+1);
T=a:h:b;
Y(1)=ya;
for j=1:M
D=feval(df,T(j),Y(j));
Y(j+1)=Y(j)+h*(D(1)+h*(D(2)/2+h*(D(3)/6+h*D(4)/24)));
end
T4=[T'  Y'];
```

ولحل المثال يجب أولاً أن ندخل المشتقات بالصورة الآتية:



وفي نافذة الأوامر ندخل المدخلات:




```
>> a=0;
>> b=3;
>> ya=1;
>> M=12;
>> T4=taylor('df',a,b,ya,M)

T4 =

         0    1.0000
    0.2500    0.8975
    0.5000    0.8364
    0.7500    0.8119
    1.0000    0.8196
    1.2500    0.8558
    1.5000    0.9171
    1.7500    1.0006
    2.0000    1.1036
    2.2500    1.2240
    2.5000    1.3595
    2.7500    1.5085
    3.0000    1.6694
```

4-6 **طريقة رونج - كوتا من الرتبة الرابعة** Runge-Kutta Method of order 4

إن طريقة أويلر لا تستعمل عملياً لكونها تحتاج الي خطوة صغيرة (قيمة h يجب أن تكون صغيرة) للحصول علي دقة معقولة، وطريقة تايلر من الرتب العليا غير مرغوبة كأسلوب عام لحل المعادلات التفاضلية لأنها تحتاج الي مشتقات كثيرة للدالة y(x)

أما طريقة رونج - كوتا فتعتبر من أهم الطرق المستخدمة في إيجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية فهي تمكنا من الحصول علي دقة عالية مع تجنب

الحاجة الي اشتقاق للدالة y(x) وتعتمد علي تعويض الدالة f(x,y) في نقاط مختارة.

معادلات طريقة رنج كوتا من الرتبة الرابعة (R. H. 4) تعرف بالصورة:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (1)$$

حيث

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + hk_3)$$

مثال:

باستخدام طريقة R. K. 4 أوجد الحل التقريبي لمسالة الشرط الابتدائي

$$y' = -y + x + 1 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 1 \qquad h = 0.1$$

الحل

يمكن كتابة معادلات رنج كوتا بالصورة الأتية:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (2)$$

حيث

بتطبيق معادلات رنج كوتا حيث

$$f(x, y) = -y + x + 1$$

تصبح

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_3)$$

$$k_1 = -y_n + x_n + 1$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}(y_n + x_n + 1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}[(\frac{h}{2} - 1) y_n + (1 - \frac{h}{2}) x_n + 1])$$

$$= \frac{h}{2}(1 - \frac{h}{2}) y_n + (1 - \frac{h}{2}) x_n + 1$$

$$= (1 - \frac{h}{2})(1 - \frac{h}{2})(x_n - y_n) + 1$$

$$k_4 = (x_n + h, y_n + h k_3)$$

$$= -y_n + h(1 - \frac{h}{2}(1 - \frac{h}{2}))(x_n - y_n) + 1 + x_n + h + 1$$

$$\text{for} \quad \text{each} \quad n = 0,1,2,3,......,9$$

مثلاً عند n=0

$$k_1 = -y_0 + x_0 + 1 = 0$$

$$k_2 = (-0.95 y_0 + 0.95 x_n + 1) = 0.05$$

$$k_3 = -0.9525(x_n - y_n) + 1 = 0.09525$$

$$k_4 = -1 - 0.19525 = 0.0525$$

وبتعويض هذه القيم في المعادلة

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

نتحصل علي

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 0 + \frac{0.1}{6}(0 + 2\times 0.05 + 2\times(1.09525) + 0.09525)$$
$$= 1.0048375009$$

x_n	y_{n+1}
0	00000 .1
1 .0	0048375000 .1
2 .0	187309014 .1
3 .0	…….

مثال:

إن الحل الصحيح للمعادلة التفاضلية $y' = 3x + \frac{y}{2}$ هو $y = 13e^{x/2} - 6x - 12$ جد الحل التقريبي للمعادلة بالقيمة الابتدائية $y(0) = 1$ وبأخذ $h = 0.1$ للفترة $0 \le x \le 1$ واثبت أن الدقة تزداد بنقصان الفترة.

الحل

بتطبيق معادلات رنج كوتا حيث $f(x,y) = 3x + y/2$ تصبح:

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(0,1) = 0.05$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = hf(0.05, 1.025) = 0.06625$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = hf(0.05, 1.033125) = 0.6665625$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = hf(0.1, 1.06665625) = 0.0833328$$

وبتعويض هذه القيم في معادلة رنج كوتا

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(0.05 + 2\times 0.06625 + 2\times 0.6665625 + 0.083328)$$

$$= 1.06652421856$$

ومن الحل الصحيح $y = 13e^{x/2} - 6x - 12$ نجد القيمة الصحيحة للنقطة y_1 بتعويض قيمة x_1 هي $y(0.1) = 1.06652424866$ أي تصل الدقة الي ثمانية أرقام معنوية بأخذ $h = 0.1$ وبمقارنة قيمة y الناتجة من الحل الصحيح مع قيمة y الناتجة من الحل العددي بازدياد قيمة الفترة h نلاحظ أن قيمة الخطأ يزداد كم موضح ف لجدول أدناه.

الفترة المختارة h	قيمة y من الحل الصحيح	قيمة y بطريقة رنج كوتا
$h = 0.1$	06665242486 .1=(1 .0)Z	06652421856 .1=(1 .0)y
$h = 0.2$	16722193718 .1=(2 .0)Z	1672208333 .1=(2 .0)y
$h = 0.4$	47823585939 .1=(4 .1)Z	4782 .1=(4 .0)y

مثال:

استخدم طريقة رنج كوتا من الرتبة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{(x-y)}{2}$$

في الفترة [0,3] والشرط الابتدائي y(0)=1 وبقيم $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ، ثم قارن النتيجة بالحل الصحيح $y = 3e^{-x/2} - 2 + x$.

الحل

بتطبيق معادلات رنج كوتا

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

حيث

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$
$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

نتحصل علي:

$$k_1 = \frac{0.0 - 1.0}{2} = -0.5$$
$$k_2 = \frac{0.125 - (1 + 0.25(0.5)(-0.5))}{2} = -0.40625$$
$$k_3 = \frac{0.125 - (1 + 0.25(0.5)(-0.5))}{2} = -0.4121094$$
$$k_4 = \frac{0.25 - (1 + 0.25(-0.4121094))}{2} = -0.3234863$$

وعند n=0

$$y_1 = y_0 + \frac{0.25}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$y_1 = 1.0 + 0.04167(-0.5 + 2(-0.40625) + 2(-0.4121094) - 0.3234863)$$
$$= 0.8974915$$

وهكذا نتحصل علي بقية القيم والجدول أدناه يوضح القيم المحسوبة:

x_n	y_{n+1}				Z_{n+1}
	$h=1$	$h=\frac{1}{2}$	$h=\frac{1}{4}$	$h=\frac{1}{8}$	
0	0 .1	0 .1	0 .1	0 .1	0 .1
125 .1				9432392 .0	9432392 .0
25 .0			8974915 .0	8974908 .0	8974917 .0
375 .0				8620874 .0	8620874 .0
50 .0		8364258 .0	83644037 .0	8364024 .0	8364023 .0
75 .0			8118696 .0	8118679 .0	8118678 .0
00 .1	8203125 .0	8196285 .0	8195940 .0	8195921 .0	8195920 .0
50 .1		9171423 .1	9171021 .0	9170998 .0	9170997 .0
00 .2	1045125 .1	1036826 .1	1036408 .1	1036385 .1	1036383 .1
50 .2		3595575 .1	3595168 .1	3595145 .1	3595144 .1
00 .3	6701860 .1	6694308 .1	6693928 .1	6693906 .1	6693905 .1

الخوارزمية:

To approximate the solution of the initial value problem

$y' = f(x_n, y_n)$ *where* $a \le x \le b$ *and* $y(a) = \alpha$

at (M+1) wqually spaced numbers in interval [a,b]

Input: end point a,b, integer M, intial condition

Output:

Approximation y at (M+1) value of x

Step1:

Set $h = \dfrac{b-a}{M}$ $x = a$ $y = \alpha$

Output (x,y)

Step2:

For n=1,2,3,……. ,M+1 do step 3-5

Step3:

Set

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_3)$$

Step4: set $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Step5: output (x,y)

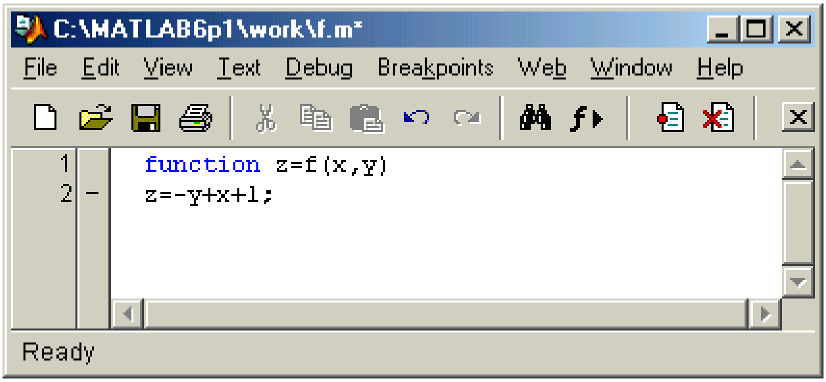
Step6: stop .

باستخدام الـ Matlab

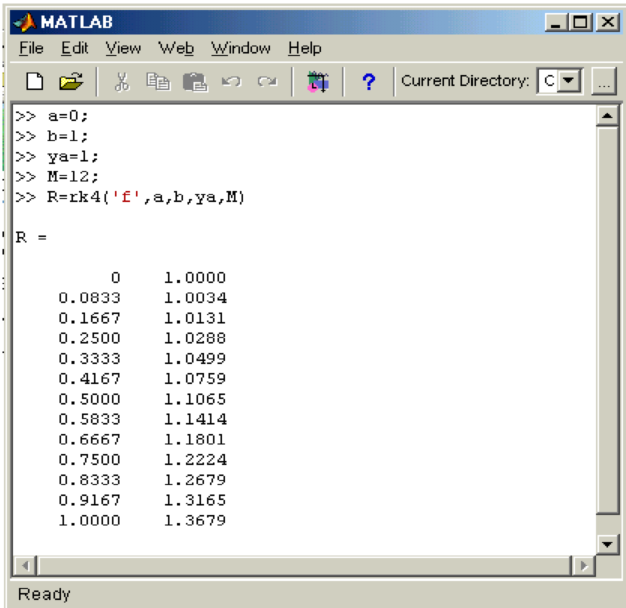
```
function R=rk4(f,a,b,ya,M)
%Input  - f is the function enterd as astring 'f'
%  - a and b are the left and the right end points
%  - ya is the initial condition y(a)
%  - M is the number of steps
%Output -R=[T' Y'] where T is the vector of abscissas
%  and Y is the vector of ordinates
h=(b-a)/M;
T=zeros(1,M+1);
Y=zeros(1,M+1);
T=a:h:b;
Y(1)=ya;
for j=1:M
k1=h*feval(f,T(j),Y(j));
k2=h*feval(f,T(j)+h/2,Y(j)+k1/2);
```

```
k3=h*feval(f,T(j)+h/2,Y(j)+k2/2);
k4=h*feval(f,T(j)+h,Y(j)+k3);
Y(j+1)=Y(j)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
R=[T' Y'];
```

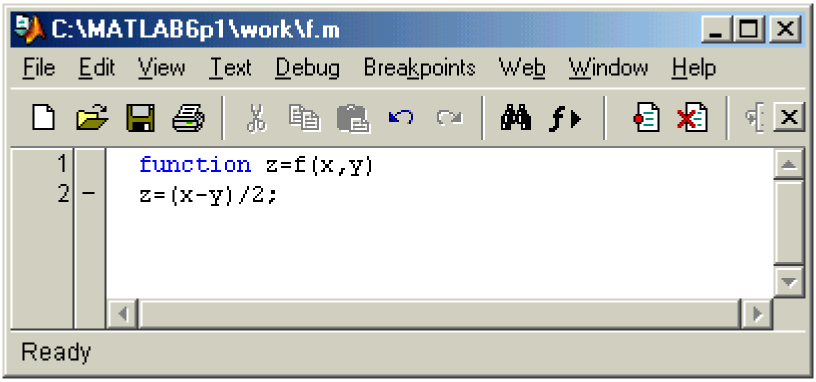
ولحل المثال الأول يجب أولاً تعريف الدالة:



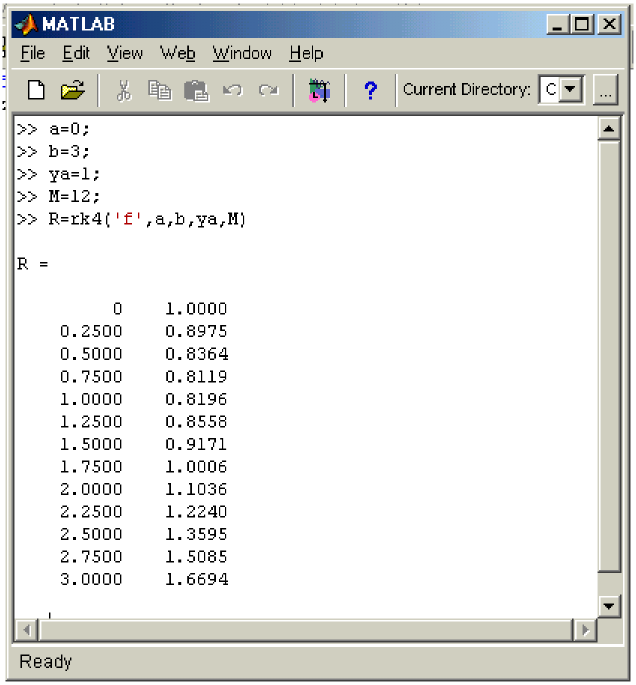
ومن نافذة الأوامر ندخل المدخلات كالآتي:



ولحل المثال الثاني بنفس الطريقة نعرف أولاً الدالة:



ومن نافذة الأوامر أيضا ندخل المدخلات كالأتي:



5-6 طريقة آدمز باشفورث Adams- Bashforth-Moulton Method

إن الطرق التي تعتمد على أسلوب الخطوة الواحدة مثل طريقة تايلر من الرتبة الرابعة وطريقة رنج كوتا تحتاج لنبدأ الحل بمعرفة قيمة f(x,y) لنقطة

واحدة x_n نبدأ منها لإيجاد النقطة التالية x_{n+1} ، أما الطرق المتعددة الخطوات مثل طريقة آدمز باشفورث فإنها لا تستعمل إلا إذا توفرت لدينا من مصادر أخري بعض من قيم الدالة المطلوبة ، لنفرض لدينا قيم تقريبية لكل من y, y' في نقاط متباعدة بمسافات متساوية $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n$

(البعد بين إي نقطة والأخرى هو h) والمطلوب إيجاد قيمة y_{n+1} بطريقة آدمز باشفورث.

تعتمد طريقة آدمز باشفورث علي إيجاد تكامل المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

فنحصل علي

$$y_{n+1} = y_n + \int_n f dn$$

وبما أن $x = a + nh$ فإن $dx = ndn$ وباستخدام قاعدة الإستكمال الخلفي لنيوتن (Backward Newton Interpolation Rule)

$$f(x_n) = (1 + \frac{n}{2!}\nabla + \frac{n(n+1)}{2!}\nabla^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\nabla^3) f(a)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(n + \frac{1}{2}n^2\nabla + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2)\nabla^2 + \ldots\ldots\ldots) f(x_n)$$

وللحصول علي علاقة المتنبي والتي تسمي (Adams-Bashfurth Prediction) نحدد التكامل من $n = 1, n = 0$

$$y_{n+1} = y_n + h(1 + \frac{1}{2}\nabla + \frac{5}{12}\nabla^2 + \frac{3}{8}\nabla^3 + \frac{251}{720}\nabla^4 + \ldots\ldots) f(x_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(f_n + \frac{1}{2} f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n + \frac{251}{720} f_n + \ldots\ldots\ldots)$$

إن هذه العلاقة تقدر قيمة y_{n+1} بدلالة قيمة y الموجودة وإذا كان حدود التكامل $n=0, n=-1$ لنحصل علي:

$$y_n = y_{n-1} + h(1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{24}\nabla^3 - \frac{19}{720}\nabla^4 + ...) f(x_n)$$

ويمكن التعبير عن علاقة y_{n+1} بدلالة y_n فتكون

$$y_{n-1} = y_n + h(1 - \frac{1}{2}\nabla - \frac{1}{12}\nabla^2 - \frac{1}{24}\nabla^3 - \frac{19}{720}\nabla^4 + ...) f(x_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(f_{n+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{n+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{n+1} - \frac{19}{720}\nabla^4 f_{n+1} + ...) f(x_n)$$

قيمة المتنبئ

x	y	(y،x)f=Y	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$
.....						
.....						
x_{n-4}	y_{n-4}	$f(x_{n-4})$				
			$\nabla f(x_{n-3})$			
x_{n-3}	y_{n-3}	$f(x_{n-3})$		$\nabla^2 f(x_{n-2})$		
			$\nabla f(x_{n-2})$		$\nabla^3 f(x_{n-1})$	
x_{n-2}	y_{n-2}	$f(x_{n-2})$		$\nabla^2 f(x_{n-1})$		$\nabla^4 f(x_n)$
			$\nabla f(x_{n-1})$		$\nabla^3 f(x_n)$	
x_{n-1}	y_{n-1}	$f(x_{n-1})$		$\nabla^2 f(x_n)$		
			$\nabla f(x_n)$			
x_n	y_n	$f(x_n)$				
x_{n+1}	y_{n+1}					

وتستعمل معادلة المتنبي مرة واحدة ونعوض القيم الناتجة في الجدول ثم نستعمل معادلة المصحح استنادا الي قيم المتنبي في الجدول وبعد الحصول علي التصحيح نستبدل قيم المتنبئ في الجدول بقيم التصحيح ويمكن معادلة المصحح عدة مرات وفي كل مرة نستبدل القيم في الجدول بالقيم الجديدة حتي نحصل علي الدقة المطلوبة.

وكما ذكرنا فإن هذه الطريقة تعتمد علي النقاط المتساوية (التي تبعد عن بعضها بفترات متساوية)، ولذا فإنها تعتمد علي خطوات ثابتة الطول، وأن تغير الفترة ليست بسيطة ولذا فلا يتم تغيرها إلا في الأماكن التي يتغير عندها الحل سريعاً وعادة فإن معظم البرامج تعد إما باختيار مضاعفة للفترة وبهذا الحالة نحتاج الي استنتاج نقاط جديدة بين النقاط المتوفرة، ومن المعتاد استعمال أربعة نقاط فتسمي الطريقة بآدم مولتن (Adams-Moulton) فيكون المتنبئ :

$$y_{n+1} = y_n + h(f_n + \frac{1}{2}\nabla f_{n-1} + \frac{5}{12}\nabla^2 f_{n-2} + \frac{3}{8}\nabla^3 f_{n-3})$$

والمصحح (corrector)

$$y_{n+1} = y_n + h(f_{n+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{n+1} + \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{n-3})$$

ولتبسيط الحل الحسابي فمن المعتاد استعمال الدوال بد الفروق فنحصل بتعويض العلاقات

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$$
$$\nabla^2 f_n = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$\nabla^3 f_n = f_n - 3f_{n-1} - 3f_{n-2} - f_{n-3}$$

فنحصل علي علاقة المتبي بدلالة الدوال بدل الفروق وتكون

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

وكذلك تكون معادلة المصحح

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(f_{n-1} - 5f_{n-1} + 19f_n + 9f_{n+1})$$

مثال:

استخدم طريقة آدمز باشفورث لحل المعادلة التفاضلية $y' = x + y$ والشرط الابتدائي $y(0) = 1$ خذ $h = 0.1$ علماً بان قيم النقاط الثلاثة الأولي بطريقة تايلر هي:

$y(0.1) = 1.11034$

$y(0.2) = 1.24281$

$y(0.3) = 1.39972$

في البداية نكون جدول الفروق أدناه ومن $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ فإن

$f(x,y) = x + y$

x	y	f	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
0	0 .1	0 .1			
			21034 .0		
1 .0	11034 .1	21034 .1		02213 .0	
			23247 .0		00231 .0
2 .0	24281 .1	44281 .1		0244 .0	
			25691 .0		00257 .0
3 .0	39972 .1	69972 .1		02701 .0	
4 .0	58364 .1	98364 .1			
	قيمة المتنبئ				
	58365 .1				
	قيمة المصحح				

وبالتعويض في معادلة آدمز باشفورث

$$y_{n+1} = y_n + h(f_n + \frac{1}{2}\nabla f_{n-1} + \frac{5}{12}\nabla^2 f_{n-2} + \frac{3}{8}\nabla^3 f_{n-3})$$

$$Y(0.4) = 1.39972 + 0.1(1.69972) + \frac{1}{2}(0.2569) + \frac{5}{12}(0.0244) + \frac{3}{8}(0.00231)) = 1.58364$$

وهي القيمة المتنبئ بها ثم بتعويض هذه القيمة في جدول الفروق لنحصل عل قيمة حد التصحيح من لمعادلة

$$y(0.4) = 1.39972 + 0.1((1.98364) - \frac{1}{2}(0.28392) - \frac{1}{12}(0.02701) - \frac{1}{24}(0.00257)) = 1.58365$$

وهي القيمة الصحيحة وتستخدم في الجدول بدلاً من القيمة السابقة ويعاد حساب قيم الفروق للأعمدة الباقية وهذه القيم تستبدل جميع القيم السابقة ويمكن تكرار عادلة التصحيح لأكثر من مرة وكل مرة نستخدم جدول الفروق لتعويض القيم كما تم أعلاه.

6- 6 طريقة ميلين- سمبسون Milne-simpson Method

لنفرض أن المعادلة التفاضلية علي الصورة $y' = f(x,y)$ طريقة ميلين مبنية علي قاعدة سمبسون للتكامل المغلق والمفتوح فبالنسبة للتكامل المفتوح تأخذ الصيغة:

$$\int_0^4 f(x).dx = \int_0^4 y'.dx = \frac{4}{3}h(2y'_1 - y'_2 + 2y'_3)$$

$$y_4 = y_0 + \frac{4h}{3}(2y'_n - y'_2 + 2y'_3)$$

وتسمي المعادلة أعلاه بمعادلة المتنبي لكونها تتنبأ القيمة التقريبية y_4 من قيم المشتقات للنقاط الأربعة السابقة.

أما المغلقة فإنها تأخذ الصيغة:

$$\int_0^2 f(x).dx = \int_0^4 y'.dx = \frac{h}{3}(y'_2 + 4y'_3 + y'_4)$$

$$y_4 = y_2 + \frac{h}{3}(y'_2 + 4y'_3 + y'_4)$$

وتسمي المعادلة بمعادلة المصحح وبصورة عامة يمكن كتابة معادلات المتنبئ والمصحح بالصورة الأتية:

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n)$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1})$$

من فوائد هذه الطريقة إنها تحتاج الي حسابات قليلة للتفاضلات وفيها أداة للتدقيق، ومن عيوبها يجب الحصول علي النقاط الأربعة الأولي من طريقة اخري كما يستوجب استعمال فترات ثابتة.

مثال:

إستخدم طريقة ميلين سمبسون لحل المعادلة التفاضلية

$$y' = x + y$$

علماً بان الشرط الابتدائي هو $y(0) = 1$ وإن القيم التي تليها قد تم الحصول عليها من طريقة تايلر وهي

$$y(0.1) = 1.11034$$
$$y(0.2) = 1.24281$$
$$y(0.3) = 1.39972$$

يمكن تنظيم الجدول التالي حيث $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ وبالمقارنة بالمعادلة المعطاة فإن $f(x, y) = x + y$ وبالتعويض نحصل علي الجدول أدناه

x	y	F(x،y)
0	$y_0=1.0$	$f_0=1.0$
1 .0	$y_1=1.1103$	$f_1=1.2103$
2 .0	$y_2=1.2428$	$f_2=1.4428$
3 .0	$y_3=1.2428$	$f_3=1.6997$
4 .0	$y_4=1.5836$	$f_4=1.9836$

وبالتعويض في معادلة المتنبئ

$$y_4=y_0+\frac{4h}{3}(2y'_n-y'_2+2y'_3)$$

نحصل علي $y(0.4)=1.5836$ نستخدم هذه القيمة في $f(x,y)=x+y$

فنحصل علي

$$f(x+y)=1.9836$$

وباستعمال معادلة التصحيح

$$y_4=y_2+\frac{h}{3}(y'_2+4y'_3+y'_4)$$

نحصل علي $y(0.4)=1.5836$ ونعوض القيمة في لجدو أعلاه ليصبح الجدول كالأتي:

x	y	F(x،y)
0	$y_0=1.0$	$f_0=1.0$
1 .0	$y_1=1.1103$	$f_1=1.2103$
2 .0	$y_2=1.2428$	$f_2=1.4428$
3 .0	$y_3=1.3997$	$f_3=1.6997$
4 .0	$y_4=1.5836$	$f_4=1.9836$

ليس في كل الأحوال تساوي قيمة المصحح مع قيمة المتنبي لقد تسوت في هذه المسالة من باب الصدفة.

مثال:

إستخدم طريقة آدمز باشفورت ميلين سمبسون لإيجاد الحب التقريبي لمسألة الشرط الإبتدائي

$$y' = \frac{x-y}{2}$$

في الفترة [3 0] و $y(0)=1$ وأن القيم التي تليها قد تم الحصول عليها من طريقة رانج - كوتا هي

$$y_1 = 0.94323919$$

$$y_2 = 0.89749071$$

$$y_3 = 0.86208736$$

باستخدام معادلات المتنبي والمصحح التي ذكرناه سابقاً نجد أن القيم المحسوبة هي:

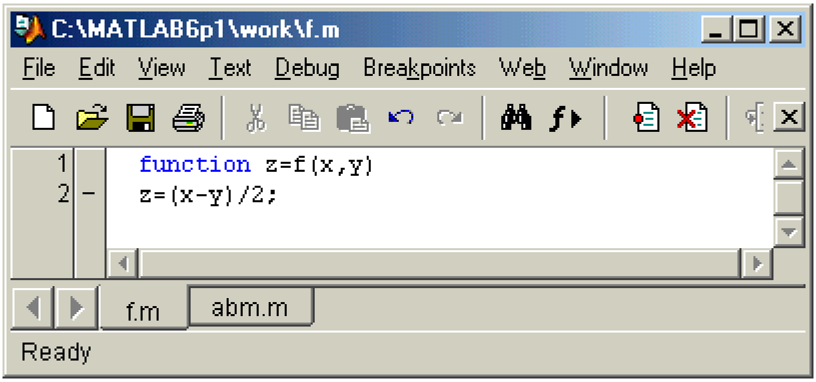
n	Moulton Bashforth Admas	Simpson Milne
0 .0	0000000 .1	0000000 .1
5 .0	83640227 .0	83640231 .0
625 .0	81984673 .0	81984687 .0
75 .0	81186762 .0	81186778 .0
875 .0	81194530 .0	81194555 .0
0 .1	81959166 .0	81959190 .0
5 .1	91709920 .0	91709975 .0
0 .2	10363781 .1	10363722 .1
5 .2	35951387 .1	35951429 .1

n	Moulton Bashforth Admas	Simpson Milne
625 .2	43243853 .1	43243899 .1
75 .2	50851827 .1	50851869 .1
875 .2	58756195 .1	587561240 .1
0 .3	66938998 .1	669389038 .1

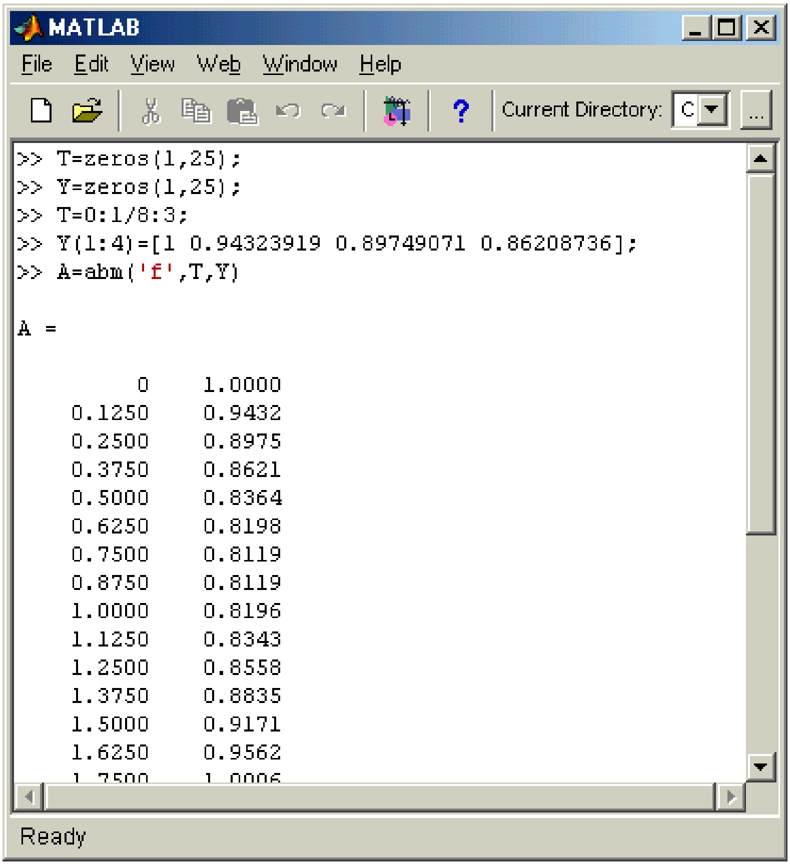
بإستخدام الـ Matlab بطريقة Adams-Bashforth

```
function A=abm(f,T,Y)
%Input   -f is the function entered as astring 'f'
%   -T is the Vector of abscissas
%   -Y is the vector of ordinates
%Remark  the first four coordinates of T and Y must
%   have starting values obtained with Rk4
%output  -A=[T' Y'] where T is the vector of abscissas and
%y is the vector of ordinates
n=length(T);
if n<5,break,end;
F=zeros(1,4);
F=feval(f,T(1:4),Y(1:4));
h=T(2)-T(1);
for k=4:n-1
%Predictor
p=Y(k)+(h/24)*(F*[-9 37 -59 55]');
T(k+1)=T(1)+h*k;
F=[F(2) F(3) F(4) feval(f,T(k+1),p)];
%corrector
Y(k+1)=Y(k)+(h/24)*(F*[1 -5 19 9]');
F(4)=feval(f,T(k+1),Y(k+1));
end
A=[T' Y'];
```

ولحل المثال الثاني إيضاً نعرف الدالة:



ومن نافذة الأوامر ندخل المدخلات الأتية:



الجدول أدناه يمثل القيم المتبقية من الجدول السابق

1.6250	0.9562
1.7500	1.0006
1.8750	1.0498
2.0000	1.1036
2.1250	1.1618
2.2500	1.2240
2.3750	1.2899
2.5000	1.3595
2.6250	1.4324
2.7500	1.5085
2.8750	1.5876
3.0000	1.6694

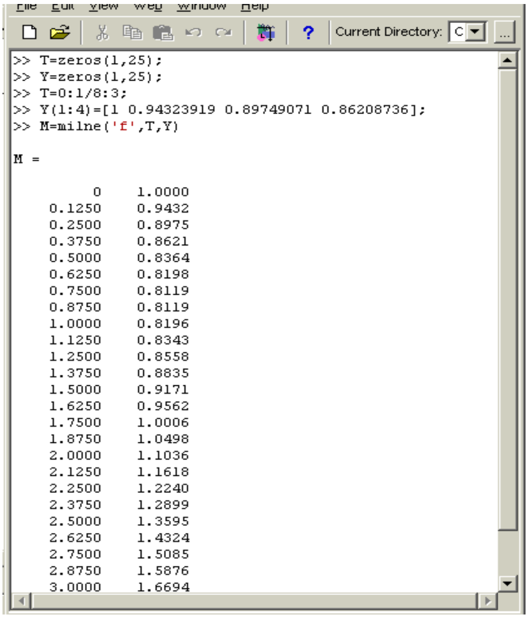
ولحل نفس المثال ولاكن بطريقة ميلين سمبسون

```
function M=milne(f,T,Y)
%Input  - f is the function entered a string 'f'
%  - T is the vector of abscissas
%  - Y is the vector of ordinates
%Remark - the first four coordinates of T and Y must
%have starting values obtained with RK4
%Output - M=[T' Y'] where T is the vector of abscissas and
%   Y is the vector of ordinates
n=length(T);
if n<5,break,end;
F=zeros(1,4);
F=feval(f,T(1:4),Y(1:4));
h=T(2)-T(1);
pold=0;
yold=0;
```

```
for k=4:n-1
%Predictor
pnew=Y(k-3)+(4*h/3)*(F(2:4)*[2 -1 2]');
%Modifier
pmod=pnew+28*(yold-pold)/29;
T(k+1)=T(1)+h*k;
F=[F(2) F(3) F(4) feval(f,T(k+1),pmod)];
%corrector
Y(k+1)=Y(k-1)+(h/3)*(F(2:4)*[1 4 1]');
pold=pnew;
yold=Y(k+1);
F(4)=feval(f,T(k+1),Y(k+1));
end
M=[T' Y'];
```

أولاً: نعرف الدالة بنفس الطريقة إلى تم بها تعريف الدالة المثال المذكور بطريقة آدمز باشفورث.

ثانياً: من نافذة الأوامر ندخل المدخلات الآتية:




```
>> T=zeros(1,25);
>> Y=zeros(1,25);
>> T=0:1/8:3;
>> Y(1:4)=[1 0.94323919 0.89749071 0.86208736];
>> M=milne('f',T,Y)

M =

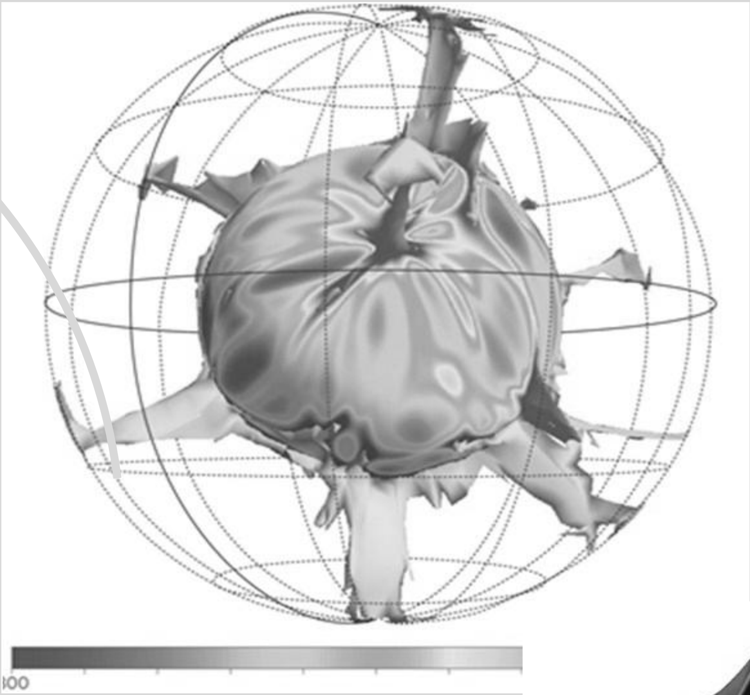
        0    1.0000
   0.1250    0.9432
   0.2500    0.8975
   0.3750    0.8621
   0.5000    0.8364
   0.6250    0.8198
   0.7500    0.8119
   0.8750    0.8119
   1.0000    0.8196
   1.1250    0.8343
   1.2500    0.8558
   1.3750    0.8835
   1.5000    0.9171
   1.6250    0.9562
   1.7500    1.0006
   1.8750    1.0498
   2.0000    1.1036
   2.1250    1.1618
   2.2500    1.2240
   2.3750    1.2899
   2.5000    1.3595
   2.6250    1.4324
   2.7500    1.5085
   2.8750    1.5876
   3.0000    1.6694
```

التحليل العددي باستخدام لغة الماتلاب

الفصل السابع

الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية

Numerical solution of Partial Differential Equations



7

MATLAB

The Language of Technical Computing

الفصل السابع

الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية

Numerical solution of Partial Differential Equations

7- 1 مقدمه :

هنالك العديد من المسائل المكتوبة بدلالة المعادلات التفاضلية الجزئية وحتى الاعتيادية يصعب حلها بالطرق التحليلية مثل المعادلات غير الخطية في حركة الموائع – المرونة- مسائل الجهد في البعدين أو الأبعاد الثلاثة، ، فالصعوبات التي يمكن ان تظهر تكمن في المعاملات المتغيرة والشروط الحدية المعقدة لذلك جاءت الطرق العددية لحل هذه المسائل وذلك بالاستفادة من الإمكانيات الكبيرة للحاسوب وهي تزودنا بأجوبة مفيدة للمسائل الصعبة .

هناك العديد من الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية ولكننا نتناول طريقة الفروقات المنتهية (Finite Difference Method) المناسبة جداً لحل معادلات الأنماط الثلاثة (القطع الزائد- والقطع المكافئ- والقطع الناقص)، ومن الناحية العلمية فإن كل المعادلات التفاضلية الجزئية يجب ان تحل بالطرق العددية.

7- 2 طريقة الفروقات المنتهية Finite Difference Method

يتم في هذه الطريقة التعويض عن المشتقات الجزئية بالفروق المنتهية وعليه يقرب حل المعادلة التفاضلية الجزئية بحل المعادلة الفروقية المنتهية والنتيجة هي جدول من الأعداد تدرج الحل u لقيم مختلفة من المتغيرات المستقلة.

من صيغة سلسلة تايلور للدالة f(x)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + ...$$

وبإهمال الحدود التي تلي الحد الثاني من السلسلة نحصل علي

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x)$$

وبوضع $f'(x)$ موضع القانون نحل علي

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تسمي المعادلة أعلاه بالتقريب الفرقي الأمامي للمشتقة الأولي $f'(x)$
Forward-difference approximation))

كذلك عند تعويض h بالعدد $-h$ في سلسلة تايلور نتحصل التقريب الاتي

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - ....$$

وبإهمال الحدود التي تلي الحد الثاني في السلسلة ايضاً نتحصل علي

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x)$$

وبوضع $f'(x)$ موضع القانون نحصل علي

$$f'(x) \cong \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

والذي يسمي بالتقريب الفرقي الخلفي للمشتقة الأولي (backward-difference approximation

بطرح المعادلتين أدناه

$$f(x-h) \cong f(x) - hf'(x)$$
$$f(x+h) \cong f(x) + hf'(x)$$

يمكن أن نحصل علي التقريب الاتي

$$f'(x) \cong \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right]$$

والـذي يســمي بالتقريــب الفرقــي المركــزي (central - difference approximation) للمشتقة الأولي.

وإذا ابتدأنا بثلاثة حدود من سلسلة تايلور فإننا سنحصل علي التقريب الفرقي المركزي للمشتقة الثانية $f''(x)$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x).........(1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x).........(2)$$

وبجمع (1) و(2) نحصل علي:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x)$$

وبوضع $f''(x)$ موضع القانون نحصل علي:

$$f''(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\right]$$

وهو التقريب الفرقي المركزي للمشتقة الثانية

الآن نحول التقريبات الفروقية المنتهية فإذا بدأنا بسلسلة تايلور بالمتغيرين

$$u(x+h,y) = u(x,y) + h u_x(x,y) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x,y) + ...$$

$$u(x-h,y) = u(x,y) - h u_x(x,y) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x,y) - ....$$

فنحصل علي التقريب الأمامي للمشتقة الأولي كالأتي

$$u_x(x,y) \cong \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}$$

$$u_{xx}(x,y) \cong \frac{1}{h^2}\left[u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)\right]$$

$$u_y(x,y) \cong \frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k}$$

$$u_{yy}(x,y) \cong \frac{1}{k^2}\left[u(x,y+k)-2u(x,y)+u(x,y-k)\right]$$

عند حل مسائل المعادلات التفاضلية نستخدم الرموز الآتية.

$$u(x,y) = u_{i.j}$$

$$u(x,y+k) = u_{i+1.j}$$

$$u(x,y-k) = u_{i-1.j}$$

$$u(x+h,y) = u_{i.j+1}$$

$$u(x-h,y) = u_{i.j-1}$$

صيغ تقريبية مركزية

$$u_x(x,y) = \frac{1}{2h}(u_{i.j+1}-u_{i.j-1})$$

$$u_y(x,y) = \frac{1}{2k}(u_{i+1.j}-u_{i-1.j})$$

$$u_{xx}(x,y) = \frac{1}{h^2}(u_{i.j+1}-2u_{i.j}+u_{i.j-1})$$

$$u_{yy}(x,y) = \frac{1}{k^2}\left(u_{i+1.j}-2u_{i.j}+u_{i-1.j}\right)$$

7- 3 استخدام الطريقة الفروقية المنتهية لحل معادلة الموجة

Finite Deference Method Using To Solve The Wave Equation

لحل معادلة الموجة عددياً سننظر أولاً الى كيفية تحويلها الى معادلة فروقية ثم ننظر بعد ذلك في حلول هذه المعادلات الفروقية باستخدام الشروط الابتدائية والحدية.

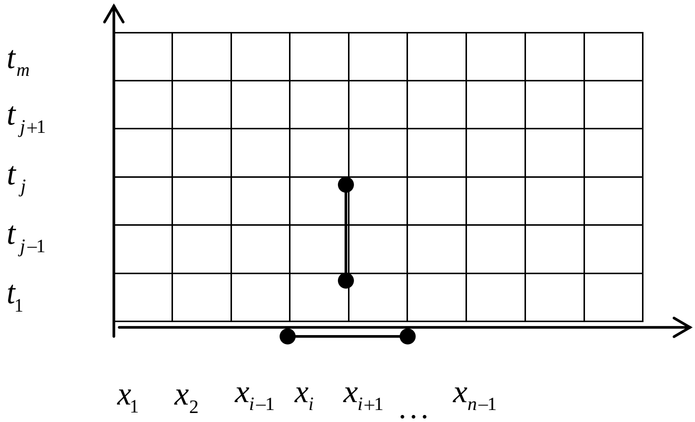
الصورة العامة للمعادلة الموجة هي:

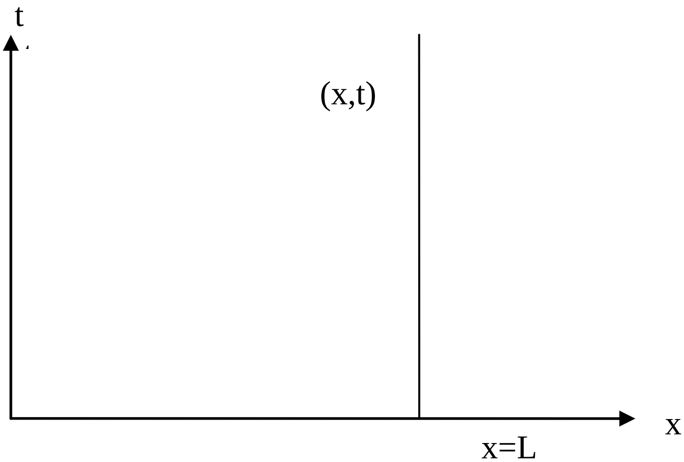
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l \qquad t > 0$$

الشروط الحدية
$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_x(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad 0 \le x \le l$$

الشروط الابتدائية
$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

نبدأ هذه المسألة برسم الشبكة





الخطوة الأولي :- نقسم المنطقة الموضحة بالرسم بين $x = 1$ ، $x = 0$ و $t = T$ و $t = 0$ بمستقيمات طولية بينهما Δx ومستقيمات عرضية المسافة بينهما Δt ، فعند كل نقطة في المساحة المطلوب إيجاد قيمة الدالة عندها توجد معادلة فروق واحدة ، فإذا قسمت المساحة الي شبكة تحتوي علي n من النقاط الداخلية فإننا نحصل علي معادلات فروقية عددها nوبحل هذه المعادلات والمعادلات الناتجة من الشروط لحدية للمسالة يمكننا الحصول علي قيم الدالة

عند كل نقطة في المساحة .ذل نكون قد استبدلنا المعادلة التفاضلية الجزئية بمجموعة من المعادلات الجبرية والتي يمكن حلها بدون إي صعوبة رياضية.

الخطوة الأولي: نقرأ N,M حيث M عدد الوحدات العرضية و N عدد الوحدات الطولية المسافة بمعني أن

$$x_i = i\Delta x \qquad t_j = j\Delta t$$

الأن $u(x_i, 0) = f(x_i)\forall i$ أي قيمة علي محور x تحدد بالدالة f ايضاً $u(0, t_j) = 0\forall j$ أي قيمة علي الخط $x = l$ تساوي صفر

الخطوة الثانية: تحويل معادلة الموجة الي معادلة فروقية

باستخدام الفروقات المركزية

$$u_{tt}(x_i, t_j) = \frac{u_{i.j+1} - 2u_{i.j} + u_{i.j-1}}{k^2}$$

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1.j} - 2u_{i.j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

وبتعويض القيم التقديرية لـ u_{xx} و u_{tt} في معادلة الموجة ينتج أن :

$$\frac{u_{i.j+1} - 2u_{i.j} + u_{i.j-1}}{k^2} = \frac{c^2 u_{i+1.j} - 2u_{i.j} + u_{i-1.j}}{h^2}$$

وبالضرب العكسي ينتج أن :

$$u_{i.j+1} - 2u_{i.j} + u_{i.j-1} = \left(\frac{k}{h}c\right)^2 \left[u_{i+1.j} - 2u_{i.j} + u_{i-1.j}\right]$$

نفرض أ ن $r = \frac{ck}{n}$ ينتج أن :

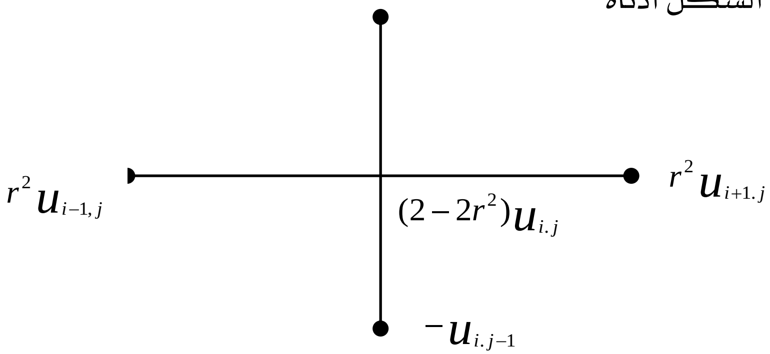
$$u_{i.j+1} - 2u_{i.j-1} + u_{i.j-1} = r^2 \left[u_{i+1.j} - 2u_{i.j} + u_{i-1.j}\right]$$

هذه المعادلة تمكننا من إيجاد الصف j+1 بمعلومية j و j-1

$$u_{i.j+1} = (2-2r^2)u_{i.j} + r^2\left[u_{i+1.j} + u_{i-1.j}\right] - u_{i.j-1}$$

$$for \quad i = 2,3,4,........., n-1$$

القيم الأربعة يمين المعادلة أعلاه والمستخدمة لإيجاد القيمة التقديرية $u_{i.j+1}$ مبينة في الشكل أدناه



وحتى نستطيع الحل يجب أن تكون القيمتين الابتدائيتين للصفين الأول والثاني معلومتين حتى نتمكن من إيجاد الصف الثالث وفي حالة معلومية الصف الأول فقط نستطيع إيجاد الصف الثاني بمساعدة الشروط الحدية للدالة g(x) كالاتي

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + k\, u_t(x_i, 0) + o(k^2)$$

من الشروط الحدية

$$u(x_i, 0) = f(x_i) = f_i$$
$$u_t(x_i, 0) = g(x_i) = g_i$$

عندها تصبح القيمة التقديرية للصف الثاني هي

$$u_{i.2} = f_i + k\, g_i \quad for \rightarrow i = 1,2,3,.......$$

تسبب هذه المعادلة بحدوث خطأ لأن:

$$u(x_i, t_2) \neq u_{i,2}$$

لهذا نأخذ قيمة k صغيرة جداً حتي لا تحوي قيمة $u_{i,2}$ خطأ كبيراً

عندما تكون الدالة الحدودية $f(x)$ مشتقة ثانية $f''(x)$ في هذه الحالة :

$$u_{xx} = f''(x)$$

ويمكن استخدام صيغة تايلور للرتبة الثانية ينتج ان

$$u_{xx}(x_i,0) = c^2 u_{xx}(x_i,0)$$
$$u_{tt}(x_i,0) = c^2 f''(x_i)$$

إذا فإن

$$u_{tt}(x_i,0) = \frac{c^2 f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + o(h^2)$$

$$u(x,k) = u(x,0) + k u_t(x,0) + \frac{h^2}{2} u_{tt}(x,0) + o(h^2)$$

ضع $x = x_i$ وعوض في المعادلة (1) و (2)

$$u(x_i,k) = f_i + k g_i + \frac{c^2k^2}{2h^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + o(h^2)o(k^2) + o(k^3)$$

بوضع $r = \frac{ck}{h}$ نحصل علي صيغة فروقية تقريبية للصف الثاني كالأتي

$$u_{i.2} = (1 - r^2) f_i + k g_i + \frac{r^2}{2}(f_{i+1} + f_{i-1})$$
$$for \to i = 2,3,4,........,n-1$$

مثال:

استخدم طريقة الفروقات المنتهية لحل معادلة الموجة

$$0 < x < 1 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad 0 < t < 1$$

الشروط الحدية $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$ $\qquad 0 < t < 0.5$

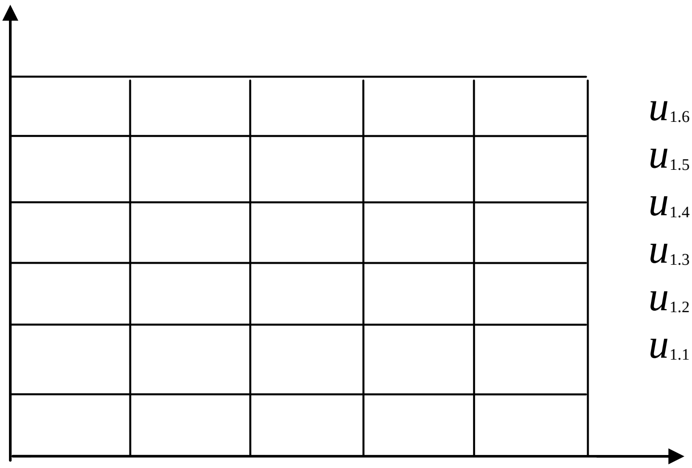
$$u(x,0) = f(x)$$

الشروط الابتدائية $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 0.5 \\ 2 - 2x & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$

$$u_t(x,0) = g(x) = 0$$

أولاً : نحل مسألة الموجة أعلاه عددياً. نقوم برسم شبكة grid ثم نقسم الشبكة الي ابعاد أفقية وراسية البعد بين أي نقطة والتي تليها أفقياً h، والبعد بين أي نقطة والتي تليها راسياً k حيث

ثم نضع $k = \dfrac{b}{M-1}$ و $h = \dfrac{a}{N-1}$ $\qquad (h = k = \dfrac{1}{4} = 0.25)$



$u_{0.6} = 0$, $u_{0.5} = 0$, $u_{0.4} = 0$, $u_{0.3} = 0$, $u_{0.2} = 0$, $u_{0.1} = 0$

$u_{1.6} = 0$, $u_{1.5} = 0$, $u_{1.4} = 0$, $u_{1.3} = 0$, $u_{1.2} = 0$, $u_{1.1} = 0$

$u_{1.0} = 0.5 \quad u_{2.0} = 1 \quad u_{3.0} = 0.5 \quad u_{4.0} = 0$

من الصورة العامة للمعادلة الفروقية المنتهية (finite-difference Equation)

$$u_{i.j+1} = (2 - 2r^2)u_{i.j} + r^2(u_{i+1.j} + u_{i-1.j}) - u_{i.j-1}$$

حيث $\mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{ck}}{\mathbf{h}}$ من المعادلة الموجة نجد أن c=1، $(h = k = \dfrac{1}{4} = 0.5)$

وبتعويض هذه القيم في المعادلة نجد أن r=1 وبتعويض قيمة r في المعادلة الفروقية ينتج أن $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{ck}}{\mathbf{h}}$

$$u_{i.j+1} = u_{i+1.j} + u_{i-1.j} - u_{i.j-1}$$

وهذه المعادلة تتطلب مننا معرفة الحل التقريبي عند مستوي ذمن j-1. j لكي نجده عند ذمن j+1 وبعبارة أخري $u_{i.1}$ نحتاج الي $u_{i+1.0}, u_{i.0}, u_{i-1.0}$ والتي يمكن الحصول عليها من الشروط الحدية

لإيجاد السطر الأول في الجدول نستخدم الشرط الابتدائي

$$u(x,0) = f(x)$$

والذي يتحول بدلالة الـ I الي الشكل الاتي

$$0 \le \chi_i \le 0.5$$
$$0.5 \le \chi_i \le 0.5$$

$$u_{i.0} = f(\chi_i) = \begin{cases} 2\chi_i \\ 2 - 2\chi_i \end{cases}$$

$$\mathrm{x}_\mathrm{i} = \mathrm{ih} \qquad\qquad \mathrm{t}_\mathrm{j} = \mathrm{jk}$$

لإيجاد السطر الثاني نستخدم المعادلة

$$u_{i.1} = (1 - r^2)\, f_{\ i} + k\, g_{\ i} + \frac{r^2}{2}\left(f_{\ i+1} + f_{\ i-1}\right) ......(1)$$
$$for \rightarrow i = 2,3,3,........, n-1$$

بما أن قيمة $\mathrm{r} = 1$ والدالة $\mathrm{g_i} = 0$ من الشرط الابتدائية الأخير، إذاً المعادلة (1) تصبح كالأتي

$$i = 2,3,4,........, n-1$$
$$u_{i.1} = \frac{1}{2}\left(f_{\ i+1} + f_{\ i-1}\right)$$

لإيجاد بقية السطور نستخدم المعادلة

$$u_{i.j+1}=u_{i+1.j}+u_{i-1.j}-u_{i.j-1}$$

عناصر الصف الأول

$$u_{1.0}= f(x_1)= f(0.25)=2\times(0.25)=0.5$$
$$u_{2.0}= f(x_2)= f(0.5)=2\times(0.5)=1$$
$$u_{3.0}= f(x_3)= f(0.75)=2\times(1-0.75)=0.5$$
$$u_{4.0}= f(x_4)= f(1)=2(1-1)=0$$

للحصول علي عناصر الصف الثاني نستخدم المعادلة

$$i=2,3,4,........,n-1$$

$$u_{i.1}=\frac{1}{2}\left(f_{i+1}+f_{i-1}\right)$$

$$i=1$$

$$u_{1.1}=\frac{1}{2}(f_2+f_0)=\frac{1}{2}(1+0)=0.5$$

$$i=2$$

$$u_{2.1}=\frac{1}{2}\left(f_3+f_1\right)=\frac{1}{2}(0.5+0.5)=0.5$$

$$i=3$$

$$u_{3.1}=\frac{1}{2}\left(f_4+f_2\right)=\frac{1}{2}(0+1)=0.5$$

$$i=4$$

$$u_{4.1}=0$$

من الشرط $u(1,t)=0$

للحصول عن عناصر الصفوف الباقية نستخدم المعادلة

$$u_{i.j+1}=u_{i+1.j}+u_{i-1.j}-u_{i.j-1}$$

$$i=1,\ j=1$$

$$u_{1.2}=u_{2.1}+u_{0.1}-u_{1.0}=0.5+0-0.5=0$$

$i=2,\ j=1$

$u_{2.2}=u_{3.1}+u_{1.1}-u_{2.0}=0.5+0.5-1=0$

$i=3,\ j=1$

$u_{3.2}=u_{4.1}+u_{2.1}-u_{3.0}=0+0.5-0.5=0$

$i=4,\ j=1$

$u_{4.1}=0$

للحصول علي الصف الرابع

$i=1,\ j=2$

$u_{1.3}=u_{2.3}+u_{0.3}-u_{1.2}=0+0-0=0$

$i=2,\ j-2$

$u_{2.3}=u_{3.3}+u_{1.3}-u_{2.2}=0+0-0.5=-0.5$

$i=3,\ j=2$

$u_{3.3}=u_{4.3}+u_{2.3}-u_{3.2}=0+0-0.5=-0.5$

$i=4,\ j=2$

$u_{4.3}=0$

وهكذا بالنسبة لبقية الفصول الأخرى

والجدول أدناه يمثل القيم المحسوبة

j | i	$x_0=0$	$x_1=0.25$	$x_2=0.5$	$x_3=0.75$	$x_4=1$
$t_0=0$	0	0.5	1	0.5	0
$t_1=0.25$	0	0.5	0.5	0.5	0
$t_2=0.5$	0	0	0	0	0
$t_3=0.75$	0	-0.5	-0.5	0.5	0
$t_4=1$	0	-0.5	-1	-0.5	0
$t_5=1.25$	0	-0.5	-0.5	-0.5	0

إستقرارية الحل Stability Condition

في المسائل الفيزيائية من الضروري إيجاد حل وحيد ومستقر (stable) ونعني بالاستقرارية (stability) أن كل تغيرات طفيفة في الشروط الحدية تقابلها تغيرات طفيفة في الحل للمسألة المعنية لذلك يجب أن تكون الشروط المعطاه متوافقة وكافية لإيجاد حل وحيد ، أما مطلب إستقرارية الحل فيكون لأن بعض الشروط في بعض المسائل الفيزيائية خصوصاً تلك التي إيجاده عن طريق التجربة يكون هنالك احياناً خطأ (errer) في حساب الشروط لذلك من الضروري أن لا يحدث الخطأ الطفيف تغيراً كبيراً في حل المسالة الفيزيائية المعينة.

بالنسبة لمعادلة الموجة فإن مطلب إستقرارية الحل يجب أن تكون $0 \le r \le 1$ ، إن تحليل عدم الإستقرارية يتطلب دراية بنظريات المصفوفات ولكن هنالك قواعد بسيطة للإشارة u إلى ضمانية الأستقرارية وهي:

1. نكتب المعادلة $u_{i.j+1}$ بدلالة قيم عند مستوي ذمن معاملات هذه $j, j-1$

المعادلات تحقق شرطين هما

أ/ كل معاملات u_j غير سالبة.

ب/ مجموع معاملات u_j لا تتعدي (2).

وفي المثال المذكور معادلات الفروق المنتهية كانت

$$u_{1.j+1} = u_{0.j} + u_{2.j} - u_{1.j-1}$$
$$u_{2.j+1} = u_{1.j} + u_{3.j} - u_{2.j-1}$$

إذاً الشرط الأول يتحقق (معاملات u_j كلها موجبة)

الشرط الثاني يتحقق مباشراً لأن 2=1+1 لكن الشرط الأول يتحقق فقط عندما تكون $0 \le r \le 1$ وهي تقابل أطول فترة ذمن مستقرة.

وإذا اردنا حل المثال نفسه ولكن بفرض $r^2 = 2$ فإن المعادلة الفروقية المنتهية لمعادلة الموجة

$$u_{i.j+1} = (2-2r^2)u_{i.j} + r^2(u_{i+1.j} + u_{i-1.j}) - u_{i.j-1}$$

$$for \rightarrow i = 1,2,3,........, n-1$$

تصبح كالأتي
$$u_{i.j+1} = 2(u_{i-1.j} - u_{i.j} + u_{i+1.j}) - u_{i.j-1}$$

وبإجراء نفس عملية الحسابات نتحصل علي القيم التقريبية الأتية:

j \ i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
t_0	0	0.5	1	0.5	0
t_1	0	0.5	0	0.5	0
t_2	0	-0.5	1	1.5-	0
t_3	0	4.5	-8	4.5	0
t_4	0	-23.5	33	-23.5	0

نلاحظ أن هذه القيم تعاني من عدم الاستقرارية .

أيضا الشرط الأول من قواعد استقرارية الحل غير متحقق وهو كل معاملات u_i غير سالبة حيث نلاحظ معامل $u_{i.j}$ تظهر مع معامل (2-)

باستخدام الـ Matlab

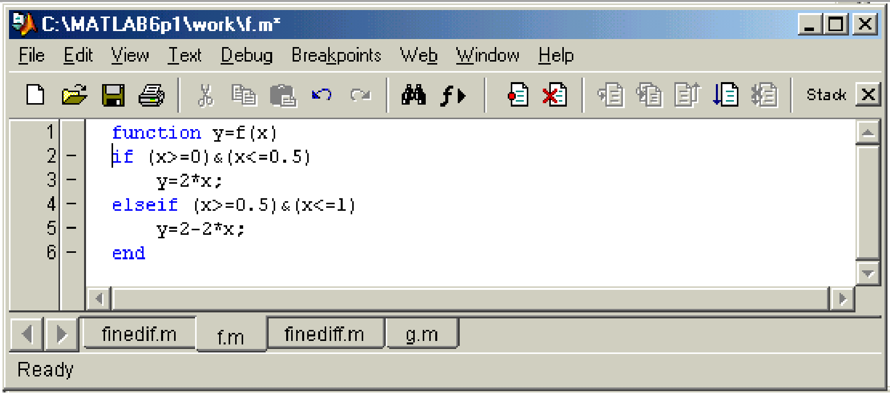
```
function U=finedif(f,g,a,b,c,n,m)
%Input   -f=u(x,0) as astring 'f'
%          -g=ut(x,0) as astring 'g'
 %         -a and b right end points of [0,a] and [0,b]
 %         -c the constant in the wave equation
 %         -n and m number of grid points over [0,a] and [0,b[
%Output -U solution matrix؛
```

```
%Initialize parameters and U
h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c*k/h;
r2=r^2;
r22=r^2/2;
s1=1-r^2;
s2=2-2*r^2;
U=zeros(n,m);
%compute first and second rows
for i=2:n-1
    U(i,1)=feval(f,h*(i-1));

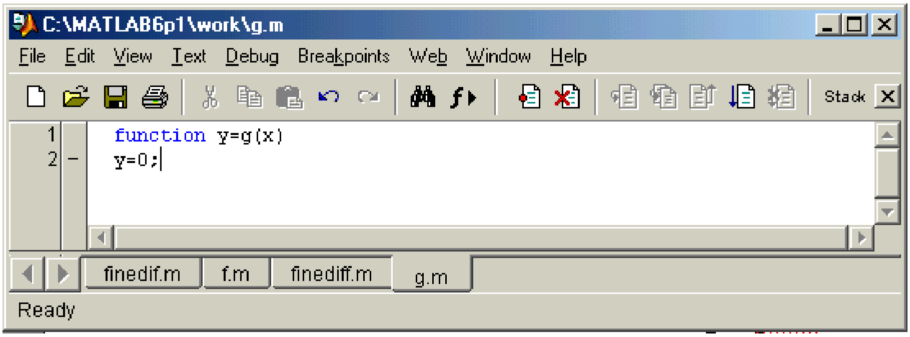
U(i,2)=s1*feval(f,h*(i-1))+k*feval('g',h*(i-1))
+r22*(feval(f,h*i)+feval(f,h*(i-2)));
end
%compute remaining rows of U
for j=3:m;
    for i=2:(n-1);
        U(i,j+1)=s2*U(i,j)+r2*(U(i-1,j)+U(i+1,j))-U(i,j-1);
    end
End
U=U';
```

يجب أولاً أن نعرف الشروط الابتدائية كدوال في M-file.

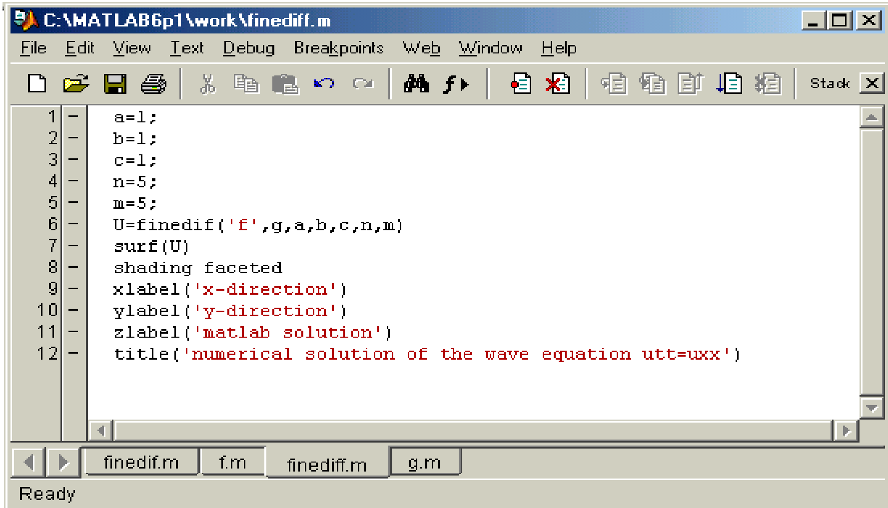
الشرط الحدي الأول:



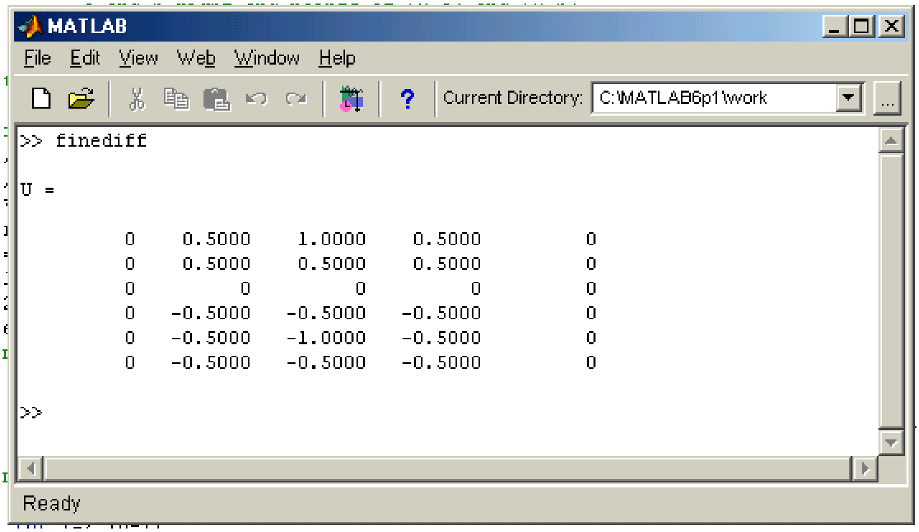
الشرط الابتدائي الثاني:



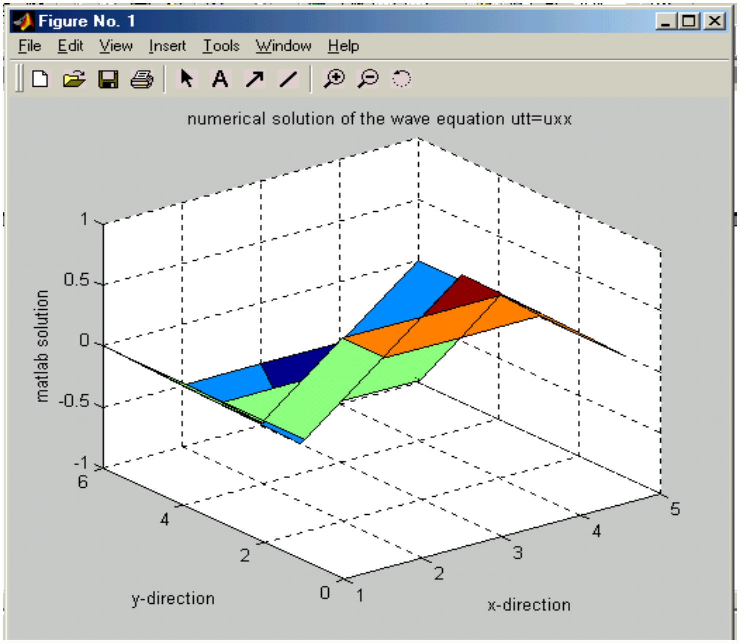
ننشئ script بالصورة الآتية للمدخلات



ومن نافذة الأوامر نستدعي الـ script



كما ذكرنا سابقاً فإن برنامج الـ **Matlab** يتميز بإحتوائه علي العديد من دوال الرسم نستخدم في هذه المسألة الدالة **surf(U)** والتي تقوم برسم سطح كما يبين الشكل أدناه



ملحوظة مهمة جداً :

للحصول علي تقريب أفضل يجب أن نأخذ قيمتي الـ M و الـ N كبيرة فكلما كانت قيمتي الـ M والـ N كبيرة كلما صغرت قيمتي الـ h, k وهذا يودي الي تقريب أفضل.

مثال:

باستخدام طريقة الفروق المنتهية أوجد حل معادلة الموجة:

$$u_{tt} = 4u_{xx} \qquad for \quad 0 \le x \le 1 \qquad 0 \le t \le 0.5$$

والتي تخضع للشروط

$$u(0,t) = 0 \qquad u(1,t) = 0 \qquad for \quad 0 \le t \le 0.5$$

$$u(x,0) = f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) \quad for \quad 0 \le x \le 1$$

$$u_t(x,0) = g(x) = 0 \qquad for \quad 0 \le x \le 1$$

خذ h=0.1 k=0.05

$$h = \frac{a}{n-1} \qquad 0.1 = \frac{1}{n-1} \qquad n-1 = \frac{1}{0.1} = 10 \qquad \therefore n = 11$$

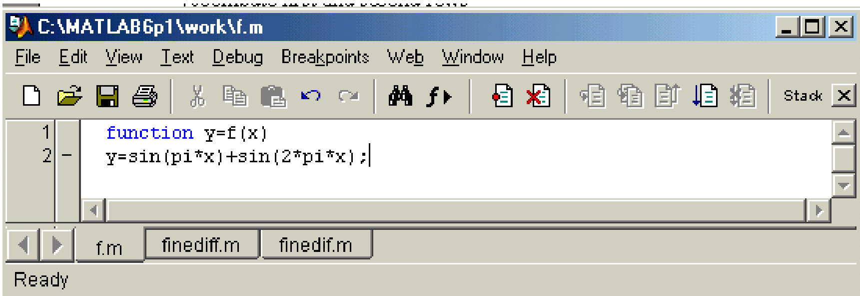
$$k = \frac{b}{m-1} \qquad 0.05 = \frac{0.5}{m-1} \qquad m-1 = \frac{0.5}{0.05} = 10 \qquad m = 11$$

بإستخدام الـ Matlab

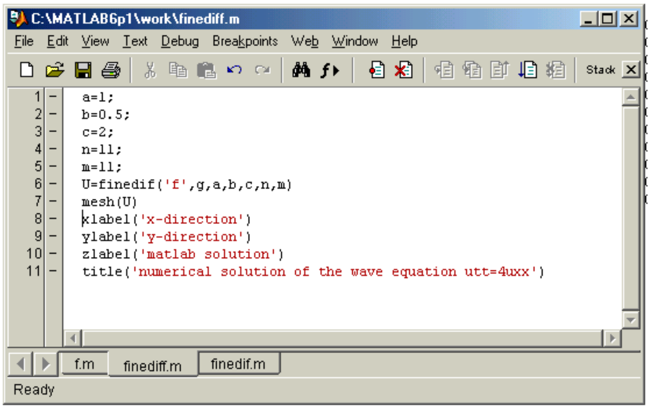
```
function U=finedif(f,g,a,b,c,n,m)
%Input   -f=u(x,0) as astring 'f'
%        -g=ut(x,0) as astring 'g'
%        -a and b right end points of [0,a] and [0,b]
%        -c the constant in the wave equation
%        -n and m number of grid points over [0,a] and [0,b[
%Output -U solution matrix؛
```

```
%Initialize parameters and U
h=a/(n-1);
 k=b/(m-1);
r=c*k/h;
r2=r^2;
r22=r^2/2;
s1=1-r^2;
s2=2-2*r^2;
U=zeros(n,m);
%compute first and second rows
for i=2:n-1
    U(i,1)=feval(f,h*(i-1));
U(i,2)=s1*feval(f,h*(i-1))+k*feval('g',h*(I-
1))+r22*(feval(f,h*i)+feval(f,h*(i-2)));
end
%compute remaining rows of U
for j=3:m;
    for i=2:(n-1);
        U(i,j)=s2*U(i,j-1)+r2*(U(i-1,j-1)+U(i+1,j-1))-U(i,j-2);
    end
end
U=U';
```

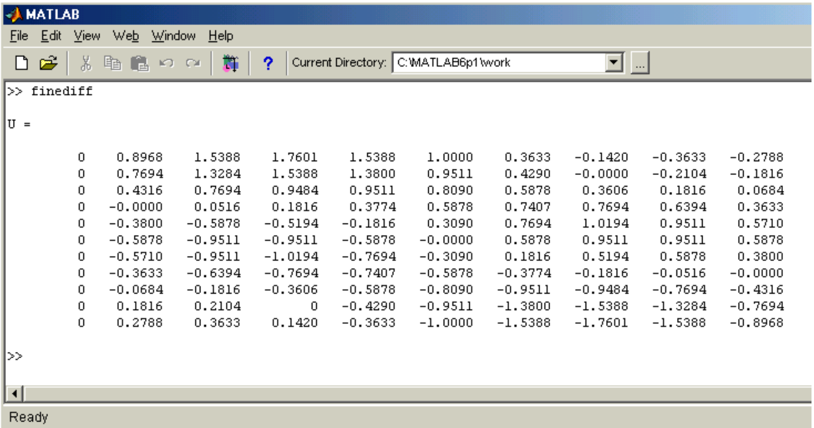
نعرف الشروط الابتدائية الأول



الشـرط الابتـدائي الثـاني يعـرف بـنفس الطريقـة الـتي عرفنـا بهـا الشـرط الابتدائي الثاني في المثال السابق ننشئ script للمدخلات بالصورة الآتية:



ومن نافذة الأوامر نستدعي الـ script بالصورة الأتية:



7- 4 استخدام طريقة الفروقات المنتهية لحل معادلة الحرارة

Finite Difference method Using To solve Heat equation

هناك نوعان من طريقة الفروقات المنتهية لحل معادلة الحرارة هما:

1) **الطريقة الفروقية المنتهية الصريحة** An Explicit Finite Difference Method

في هذه الطريقة يمكن حل المعادلة التفاضلية الجزئية من نمط القطع الزائد أو المكافئ بالتا عقب بإيجاد الحل للقيم الأكبر والأكبر من الذمن، فعند التعويض عن المشتقات بقريبياتها الفروقية المنتهية يمكن إيجاد قيم $u_{i.j}$ (عند ذمن ما) للمعادلة الفروقية بدلالة القيم السابقة، وسميت بالطريقة الصريحة لأنها تتم بإيجاد الحل عند قيمة معينة للزمن بدلالة القيم السابقة لها، هناك مشكلة في هذه الطريقة في إنه إذا كان طول تقسيمات t كبيرة بالمقارنة مع تقسيمات x فعندئذ يمكن أن تنمو الية الخطأ الدوري الي حد تدمير الحل.

2) **الطريقة الفروقية المنتهية الضمنية (طريقة كرانك- نيكلسون)**

An Implicit Finite-Difference Method(Crank-nicolson Method)

في هذه الطريقة نعوض ايضاً عن المشتقات الجزئية في المسألة بتقريبياتها الفروقية المنتهية ولكن بصورة مختلفة عن الطريقة الصريحة ففي الطريقة الضمنية نحل منظومة من المعادلات بغرض إيجاد الحل عند أكبر قيمة لذمن وبعبارة أخري لكل قيمة جديدة للزمن نحل منظومة من المعادلات الجبرية لإيجاد كل القيم، وتمتاز هذه الطريقة عن الطريقة الصريحة في إمكانية إتخاذ أطوال التقسيمات كبيرة دون الخوف من ظهور الخطأ الدوري .

إستخدام طريقة الفروقات المنتهية الصريحة (الفروقات الأمامية) الحل معادلة الحرارة Forward Difference Method Using To solve Heat Equation

$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < a \qquad 0 < t < b$$

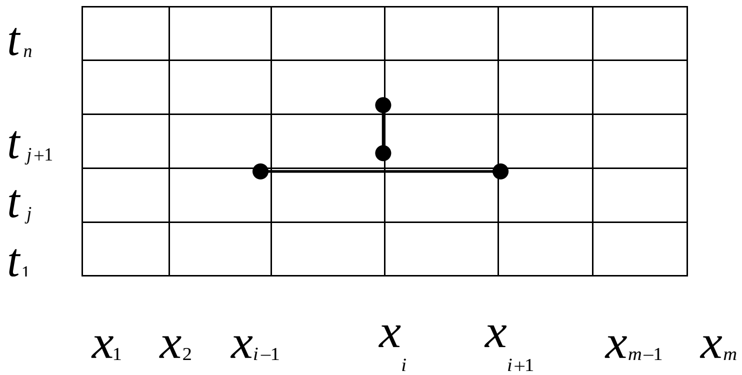
الشروط الحدية $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(a,t) = 0 \end{cases}$

الشرط الابتدائية $u(x,0) = f(x)$

وهي معادلة تعطي قياس الحرارة علي قضيب رفيع طوله a وقياس الحرارة في نهايتيه يعطي القراءة zero " شرط 1" ويأخذ الفرضية أن درجة الحرارة في اللحظة $t=0$ هي $u=f(x)$ "شرط 2 " يمكن تمثيلها علي الإحداثي $h=\frac{a}{n-1}$ xt حيث أن $0\le x\le 1$ و $t\ge 0$ في نهايتي القضيب فإن القيم لـ u محددة، نختار عدد صحيح m ثم نوجد و $k=\frac{b}{m-1}$ $i=0,1,2,3,\dots\dots,m$ for

$t_j = jk \quad x_i = ih \quad j=0,1,2,3,\dots\dots\dots,n \quad$ for

والشكل أدناه يمثل طريقة الفروقات الأمامية



The grid for te solving $u_t = u_{xx}$

نعوض عن المشتقات الجزية u_t , u_{xx} بالتقريبات الأتية

$$u_t(x,t)=\frac{1}{k}\left[u(x,t+k)-u(x,t)\right]=\frac{1}{k}(u_{i+1.j}-u_{i.j})+o(k^2)$$

$$u_{xx}(x,t)=\frac{1}{h^2}\left[u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)\right]=\frac{1}{h^2}(u_{i.j+1}-2u_{i.j}+u_{i.j-1})+o(h^2)$$

وبالتعويض عن u_t , u_{xx} بتقريباتها في معادلة الحرارة نحصل علي معادلة فروقية منتهية جديدة هي

$$\frac{1}{k}\left(u_{i+1.j}-u_{i.j}\right)=\frac{c^2}{h^2}\left(u_{i.j+1}-2u_{i.j}+u_{i.j-1}\right)$$

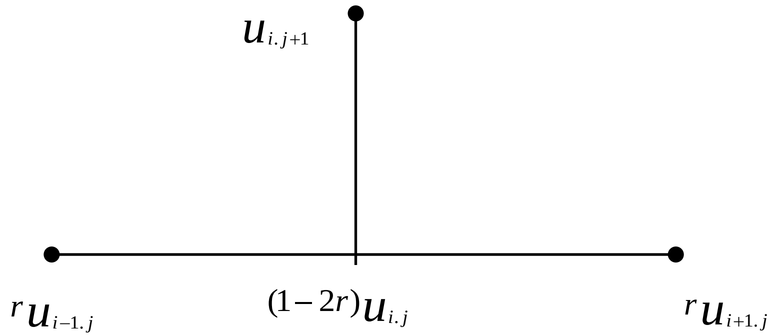
بالضرب العكسي نحصل علي

$$\left(u_{i+1.j}-u_{i.j}\right)=\left(\frac{c^2k}{h^2}\right)\left(u_{i.j+1}-2u_{i.j}+u_{i.j-1}\right)$$

وبوضع $r=\frac{k}{h^2}$ ووضع $u_{i.j+1}$ موضع القانون ينتج أن

$$u_{i.j+1}=(1-2r)u_{i.j}+r\left(u_{i-1.j}+u_{i+1.j}\right)$$

وهذه المعادلة الفروقية أعلاه تعطينا تقريباً لكل قيمة داخلية $u_{i.j+1}$ بدلالة أقرب ثلاثة قيم مجاورة في الخطوة الزمنية السابقة والشكل أعلاه يوضح ذلك،



الشرط الابتدائي يتحول إلى $u_{i.0}=f(X_i)$

$\forall i=0,1,2,3,......,m$

ونستخدم القيم المحسوبة لإيجاد قيم $u_{i.1}$ في المعادلة الفروق الشروط الحدية تتحول الكل الأتي

$$\begin{cases}u(0,t)=u_{0.j}=0\\u(a,t)=u_{m.a}=0\end{cases}$$

مثال:

لحل معادلة الحرارة أدناه بطريقة الفرو قات الأمامية

$$u_t = u_{xx} \quad \text{for} \quad 0 \le x \le 1 \quad t \le 0.20$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad 0 \le t \le 0.20$$

$$0 \le x \le 1 \quad u(x,0) = 4x - 4x^2$$

خذ $c = 1, k = 0.20, h = 0.2$

نحول معادلة الحرارة الي معادلة فروقية من الصورة العامة لمعادلة الحرارة الفروقية

$$(1)\ldots\ldots\ldots u_{i.j+1} = (1-2r)u_{i.j} + r(u_{i-1.j} + u_{i+1.j})$$

حيث $r = \frac{k}{h^2}$ ومن معادلة الحرارة أعلاه نجد أن $r = \frac{0.2}{(0.2\ )^2}$

إذاً المعادلة الفروقية (1) تتحول الي الصورة

$$(2)\ldots\ldots\ldots u_{i.j+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i-1.j} + u_{i+1.j}\right)$$

الشروط الحدية والابتدائية تتحول الي الصورة

$$u_{i.0} = f(x_i) = 4x_i - 4x_i^2$$

$$u_{0.j} = 0 \rightarrow u_{i+1.j} = 0$$

السطر الأول والعمودان الجانبيان هما الشروط الحدية والابتدائية، القيم الداخلية تتحسب من المعادلة الفروقية (2) سطراً فسطراً

$$u_{1.0}=4x_1-4x_1^{\ 2}=4(0.2)-4(0.2)^2=0.64$$
$$u_{2.0}=4x_2-4x_2^{\ 2}=4(0.4)-4(0.4)^2=0.96$$
$$u_{3.0}=4x_3-4x_3^{\ 2}=4(0.6)-4(0.6)^2=0.96$$
$$u_{4.0}=4x_4-4x_4^{\ 2}=4(0.8)-4(0.8)^2=0.64$$
$$u_{5.0}=4x_5-4x_5^{\ 2}=4(1)-4(1)=0$$

للحصول علي عناصر الصف الثاني نستخدم المعادلة

$$u_{i.j+1}=\frac{1}{2}\left(u_{i-1.j}+u_{i+1.j}\right)$$
$$u_{1.j+1}=\frac{1}{2}\left(u_{0.j}+u_{2.j}\right)$$
$$u_{2.j+1}=\frac{1}{2}\left(u_{1.j}+u_{3.j}\right)$$
$$u_{3.j+1}=\frac{1}{2}\left(u_{2.j}+u_{4.j}\right)$$
$$u_{4.j+1}=\frac{1}{2}\left(u_{3.j}+u_{5.j}\right)$$

وبتعويض $j=1$ في المعادلات أعلاه ينتج أن

$$u_{0.1}=\frac{1}{2}\left(u_{0.0}+u_{2.0}\right)=\frac{1}{2}(0+0)=0$$
$$u_{1.1}=\frac{1}{2}\left(u_{1.0}+u_{3.0}\right)=\frac{1}{2}(0+0.096)=0.48$$
$$u_{2.1}=\frac{1}{2}\left(u_{2.0}+u_{4.0}\right)=\frac{1}{2}(0.96+0.64)=0.80$$
$$u_{3.1}=\frac{1}{2}\left(u_{3.0}+u_{5.0}\right)=\frac{1}{2}(0.96+0.96)=0.80$$
$$u_{4.1}=\frac{1}{2}\left(u_{3.0}+u_{5.0}\right)=\frac{1}{2}(0.96+0)=0.48$$
$$u_{5.1}=0$$

من الشرط الحدودي $u(l,t)=0$ للحصول علي عناصر الصف الثالث نعوض $j=1$ في المعادلات أعلاه

$$u_{i,2}=\frac{1}{2}(u_{i-1.1}+u_{i+1.1})$$

$$u_{1.1}=\frac{1}{2}(u_{0.1}+u_{2.1})=\frac{1}{2}(0+0.8)=0.4$$

$$u_{2.2}=\frac{1}{2}(u_{1.2}+u_{3.1})=\frac{1}{2}(0.48+0.8)=0.64$$

$$u_{3.2}=\frac{1}{2}(u_{2.1}+u_{4.1})=\frac{1}{2}(0.8+0.48)=0.64$$

$$u_{4.2}=\frac{1}{2}(u_{3.1}+u_{5.1})=\frac{1}{2}(0.8+0)=0.4$$

$$u_{5.0}=0 \quad \text{from} \quad \text{boundry} \quad \text{condition} \quad u(1,t)=0$$

للحصول علي الصف الرابع والخامس فإن إي قيمة تاتي من متوسط القيمتين (اليمني واليسري) للقيمة المقابلة لها في الخطوة الزمنية السابقة مثلاً لإيجاد قيمة

$$u_{1.3}=\frac{0+0.64}{2}=0.32$$

حيث هاتين القيمتين $[0:0.64]$ هما القيمتين الجانبيتين للقيمة (0.4) المقابلة للقيمة $u_{1.3}$ المراد إيجادها ، والجدول أدناه يوضح قيم u التقريبية المحسوبة

j | i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
t_0	0	0.64	0.96	0.96	0.64	0
t_1	0	0.48	0.80	0.80	0.48	0
t_2	0	0.4	0.64	0.64	0.4	0
t_3	0	$u_{1.3}$	0.52	0.52	0.32	0
t_4	0	0.26	0.42	0.42	0.26	0
t_5	0	0.21	0.34	0.34	0.21	0

القيم أعلاه مقربة لرقيمين.

شرط الإستقرارية stability condition

بالنسبة لمعادلة الحرارة باستخدام طريقة الفرو قات الأمامية فإن مطلب إستقرارية الحل يجب أن تكون $0 \le r \le \frac{1}{2}$ أيضا هنالك قواعد بسيطة للإشارة إلي ضمانية إستقرارية الحل وهي:

1/ نكتب المعادلة $u_{i.j+1}$ بدلالة قيم u عند مستوي ذمن سابق معاملات هذه المعادلات يجب ان تحقق شرطين هما :

أ/ لا يوجد معامل سالب لـ u_j .

ب/ مجموع معاملات u_j لا يزيد علي (1).

بالنسبة للمثال أعلاه فإن المعادلات الفروقية كانت

$$u1.j{+}1 = r\,u0.j + (1-2r)u1.j + r\,u2.j$$
$$u2.j{+}1 = r\,u1.j + (1-2r)u2.j + r\,u3.j$$

الشـــرط الأول متحقـــق ، والشـــرط الثـــاني يتحقـــق مباشـــراً لأن $r + (1-2r) + r = 1$ ، لكـــن الشـــرط الأول يتحقـــق فقـــط عنـــدما تكـــون $r = \frac{1}{2}$

عليه فإن الاختيار $r \le \frac{1}{2}$ يقابل أطول فترة زمن مستقرة.

$$k = \frac{1}{30} \approx 0.0333$$

مثلاً في معادلة الموجة أعلاه إذا أخذنا $h = 0.2$ و

$$r = \frac{h}{k^2} = \frac{0.2}{(0.33)^2} = 0.33333$$

عليه فإن ومعادلة الحرارة الفروقية

$$ui.j+1 = (1-2r)ui.j + r(ui-1.j + ui+1.j)$$

تصبح كالأتي

$$ui.j+1 = 0.66666\,ui.j + 0.33333(ui-1.j + ui+1.j)$$

وبتطبيق نفس الطريقة السابقة للحصول علي القيم التقريبية نتحصل علي الجدول أدناه

j \ i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$t_1 = 0$	0	0.064	0.96	0.96	0.064	0
$t_2 = 0.033333$	0	0.3733	0.69333	0.69333	0.3733	0
$t_3 = 0.66667$	0	0.32888	0.42666	0.42666	0.32888	0
$t_4 = 0.10000$	0	0.13629	0.34518	0.34518	0.13629	0
$t_5 = 0.13333$	0	0.196790	0.17111	0.17111	0.196790	0
$t_6 = 0.166667$	0	0.011399	0.19251	0.19251	0.011399	0

ملحوظة:

هذه القيم مقربة لخمسة ارقام عشرية.

نلاحظ أن هذه القيم تعاني من عدم الإستقرارية أو غير مستقلة (unstable) كما أن الشرط الأول لضمان إستقرارية الحل غير متحقق وهو (يجب أن لا يوجد معامل سالب لـ u_j) نلاحظ معامل $u_{i.j}$ في المعادلة الفروقية يظهر بمعامل (-0.6666)

مثال:

استخدم طريقة الفرو قات الأمامية لحل معادلة الحرارة

$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 2 \quad 0 < t < 0.5$

$u(0,t) = u(2,t) = 0 \qquad 0 \le t \le 0.5$

$u(x,0) = \sin 2\pi x \qquad 0 \le x \le 2$

خذ h=0.4 k=0.1

$\because h = \dfrac{a}{n-1} \qquad 0.1 = \dfrac{2}{n-1} \qquad n-1 = \dfrac{2}{0.4} = 5 \qquad n = 6$

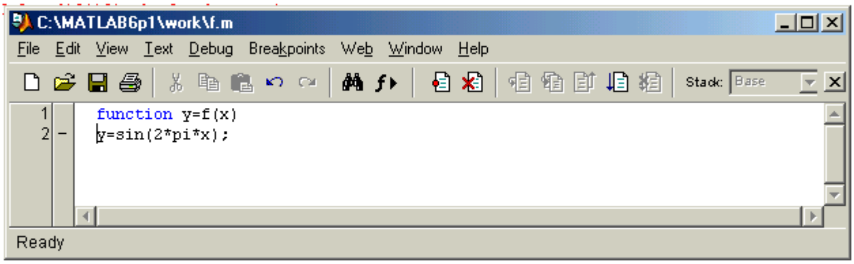
$\because k = \dfrac{b}{m-1} \qquad 0.4 = \dfrac{0.5}{m-1} \qquad m-1 = \dfrac{0.5}{0.1} = 5 \qquad m = 6$

باستخدام الـ Matlab

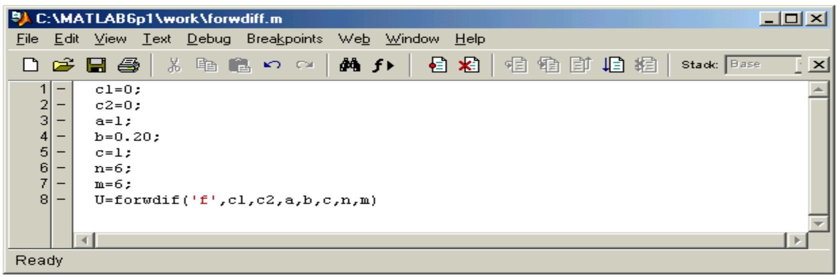
```
function U=forwdif(f,c1,c2,a,b,c,n,m)
%Input   -f=u(x,0) as a string 'f'
%          -c1=u(0,t) and c2=u(a,t)
%          -a and b right end point of [0,a] and [0,b]
%          -c the constant in the heat equation
%          -n and m number of grid points over [0,a] and [0,b]
%output  -U solution matrix؛
%Initialize parameters and U
h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c^2*k/h^2;
s=1-2*r;
U=zeros(n,m);
%Boundary conditions
```

```
U(1,1:m)=c1;
U(n,1:m)=c2;
%Generate first row
U(2:n-1,1)=feval(f,h:h:(n-2)*h');
%Generate remaining rows of U
for j=2:m
    for i=2:n-1
        U(i,j)=s*U(i,j-1)+r*(U(i-1,j-1)+U(i+1,j-1));
    end
end
U=U';
```

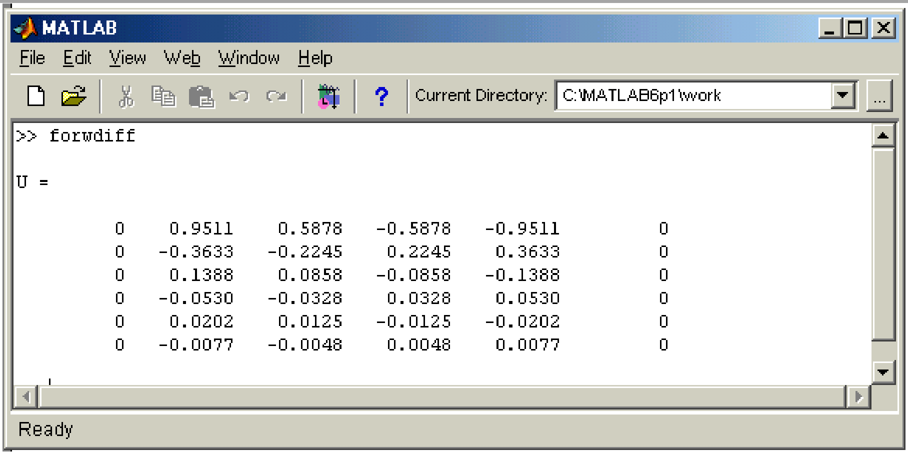
وحل المثال الثاني نعرف الدالة أولاً الأتي:



ثم ننشئ **script** للمدخلات بالصورة الأتية:



ومن نافذة الأوامر نستدعي الـ **script**



حل مسألة الحرارة بالطريقة الضمنية (كرانك نيلسون):

An implicit Finite-Difference method (Crank Nicolson method) Using To Solve Heat Equation

هـي طريقـة للعـالمين (John Crank and Phyllis Nichicon) وفيها نحـل منظومة من المعادلات بغرض إيجاد الحل عند أكبر قيمة للزمن وهذه الطريقة تقرب الأعداد للحلول عند النقطة $(x, t+k/2)$ التي تقع بين الصفوف في الشبكة لمعادلة الحرارة $u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$ ....(1) عند النقطة $(x, t+k/2)$ التي تتوسط شبكة من الخطوط. نستخدم تقريباً $u_t(x, t+k/2)$ التي نتحصل عليها من صيغة القاعدة المركزية (centeral diference formula)

$$u_t(x,t+k/2) = \frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k} + o(h^2) \quad \text{..........(2)}$$

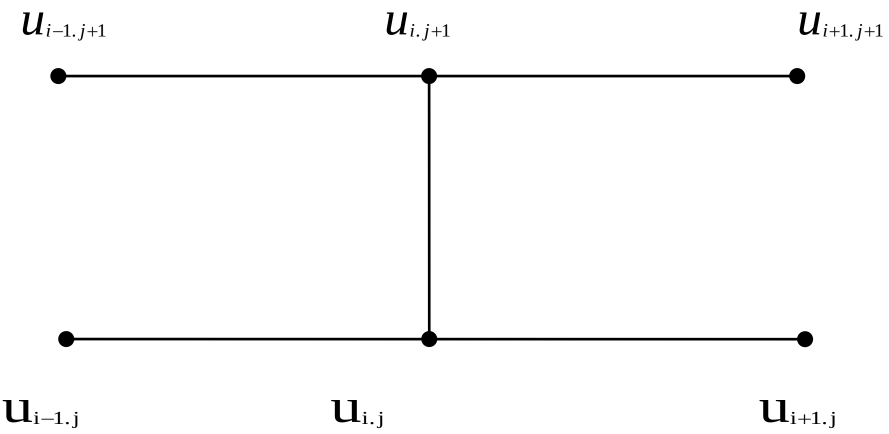
لتقريـــــــــب $u_{xx}(x, t+k/2)$ نأخــــــــذ متوســــــــط تقريـــــــــب $u_{xx}(x, t+k/2)$ and $u_{xx}(x,t)$ والي له دقة للرتبة $o(h^2)$

$$u_{xx}(x,t+k/2) = \frac{1}{2h^2}\left[u(x-h,t+k)-2u(x,t+k)+u(x+h,t+k)+u(x-h,t)-u(x,t)+(x+h,t)+o(h^2)\right] \text{.........(3)}$$

وبشكل مماثل للإشتقاق السابق في المعاملات (2) و (3) في (1) وبإهمال $o(h^2)$ و $o(k^2)$ وبإستعمال المجموع $u_{i.j} = u(x_i, t_j)$ نحصل على:

$$\frac{u_{i.j+1}-u_{i.j}}{k}=\frac{c^2\, u_{i-1.j+1}-2u_{i.j-1}+u_{i+1.j+1}+u_{i-1.j}-2u_{i.j}+u_{i+1.j}}{2h^2}$$

بتعويض $r=\frac{c^2}{h^2}$ في المعادلة أعلاه نحصل علي (ولكن يجب ان نحل لثلاثة قيم هي $u_{i+1.j+1}$ $u_{i.j+1}$ $u_{i-1.j+1}$) والشكل أدنا يوضح ذلك



وبتحويل هذه القيم الي الطرف الإيسر من المعادلة نتحصل علي

$$-r\,u_{i-1.j+1}+(2+2r)\,u_{i.j+1}-r\,u_{i+1.j+1}=(2-2r)u_{i.j}+r(u_{i-1.j}+u_{i+1.j})$$

$$\text{for} \quad i=2,3,4,........,n-1$$

من المعادلة اعلاه والنقاط الستة من قاعدو crank Nicholson كما وضحت في الشكل السابق وبإخذ $r=1$ تصبح المعادلة بالصورة الأتية:

$$-u_{i-1.j+1}+4u_{i.j+1}-u_{i+1.j+1}=u_{i-1.j}+u_{i+1.j}$$

$$for \quad i=2,3,........,n-1$$

$$j=1,2,3,............,m$$

وبتطبيق هذه المعادلة عند $i=1$ الطرف الأيمن يتضمن قيماً ابتدائية، والطرف الإيسر يتضمن ثلاثة مجاهيل بإستخدام $j=1,2,3,........,m$ يكون لدينا نظام خطي لتعين $u_{1.1}\rightarrow u_{j.1}$ وبحل هذا النظام نكون مستعدين للخطوة الثانية حيث $i=2$ فكل سطر جديد نحصل عليه كوحدة بحل نظام خطي له الصورة $Ax=B$ والشكل أدناه يوضح هذا

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & & & & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{2.j+1} \\ u_{3.j+1} \\ u_{4.j+1} \\ : \\ u_{n-2.j+1} \\ u_{n-1.j+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2c_1+u_{3.j} \\ u_{2.j}+u_{4.j} \\ : \\ : \\ u_{n-3.j}+u_{n-1.j} \\ u_{n-2.j}+2c_2 \end{bmatrix}$$

وعند حل هذه النظام نحصل علي قيم تقريبية عند النقاط الداخلية للشبكة، وبعد إيجاد هذه القيم ننتقل او نحل منظومة آخر وهكذا نستمر في حساب بقية القيم:

بإستخدام الـ Matlab يمكن إنشاء دالة لحل النظام المثلي أعلاه :

```
function X=trisys(A,D,C,B)
%Input  -A is the subdiagonal of the coefficient matrix
%         -D is the main diagonal of the coeffivient matrix
%         -C is the superdiagonal of the coefficient matrix
%         -B is the constant vector of the linear system
%Output -X is the constant vector of the linear system
N=length(B);
for k=2:N
   mult=A(k-1)/D(k-1);
```

```
    D(k)=D(k)-mult*C(k-1);
    B(k)=B(k)-mult*B(k-1);
end
X(N)=B(N)/D(N);
for k=N-1:-1:1
    X(k)=(B(k)-C(k)*X(k+1))/D(k);
End
```

مثال:

باستخدام طريقة كرنك نيلسون اوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية الجزئية الأتية:

$$u_t = u_{xx} \qquad for \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t < 0.1$$

وفق الشروط الحدية

$$\begin{cases} u(0,t) = g_1(t) = 0 & for \quad x = 0 \quad and \quad 0 \le t \le 0.1 \\ u(1,t) = g_2(t) = 0 & for \quad x = 1 \quad and \quad 0 \le t \le 0.1 \end{cases}$$

والشرط الابتدائي

$$\mathrm{u(x,0) = \sin(\prod x) - \sin(3\prod x) \qquad for \quad t = 0 \quad and \quad 0 \le x \le 1}$$

خذ $\mathrm{h = \Delta x = 0.1 \quad and \quad k = \Delta t = 0.01}$

الصف الأول نجده من الشرط الابتدائي

لإيجاد الصف الثاني نستخدم المعادلة

$$-u_{i-1.j+1} + 4u_{i.j+1} - u_{i+1.j+1} = u_{i-1.j} + u_{i+1.j}$$

حيث نثبت قيمة الـ $j = 1$ وتتغير قينة الـ $i = 2,3,4,..........,11$

$$-\mathrm{u}_{1.2} + 4\mathrm{u}_{2.2} - \mathrm{u}_{3.2} = \mathrm{u}_{1.1} + \mathrm{u}_{3.1}$$

من الفرضية $u_{1.3} = u_{1.1} = c_1 = 0$

$$4u_{2.2} - u_{3.2} = u_{3.1} = 1.5389$$

$$-u_{2.2} + 4u_{3.2} - u_{4.2} = u_{2.1} + u_{4.1}$$

$$-u_{2.2} + 4u_{3.2} - u_{4.2} = 1.180 + 1.180 = 2.2360$$

$$-u_{3.2} + 4u_{4.2} - u_{5.2} = u_{3.1} + u_{5.1}$$

$$-u_{3.2} + 4u_{4.2} - u_{5.2} = 1.5388 + 0.3632 = 1.9020$$

ونستمر هكذا نتحصل علي تسعة معادلات نحول هذه المعادلات الي صورة مصفوفات

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5389 \\ 2.2360 \\ 1.9020 \\ 1.1180 \\ 0.7266 \\ 1.1180 \\ 1.9021 \\ 2.2360 \\ 1.5388 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2.2} \\ u_{3.2} \\ u_{4.2} \\ u_{5.2} \\ u_{6.2} \\ u_{7.2} \\ u_{8.2} \\ u_{9.2} \\ u_{10.2} \end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة يمكن حلها عن طريق جاوس للحذف أو جاوس سيدل كما يمكن حلها عن طريق الـ Matlab بإستخدام الأمر c=a/b،

لايجاد بقية الصفوف نثبت قيمة الـ ....,j=2,3 ونغير قيمة الـ i=2,3,4,...,n-1 وكما ذكرنا سابقاً فإنه علي الرغم من إن هذه الطريقة طويلة بعض الشيء وهي كل صف نحصل عليه بحل منظومة من المعادلات الخطية كما في المثال أعلاه الي إنها تتيح لنا إتخاذ اطوال التقسيمات كبيرة دون الخوف من إستفحال الخطأ الدوري وهي الميزة التي تمتاز بها عن الطريقة الصريحة.

ولحل المثال أعلاه بإستخدام الـ Matlab:

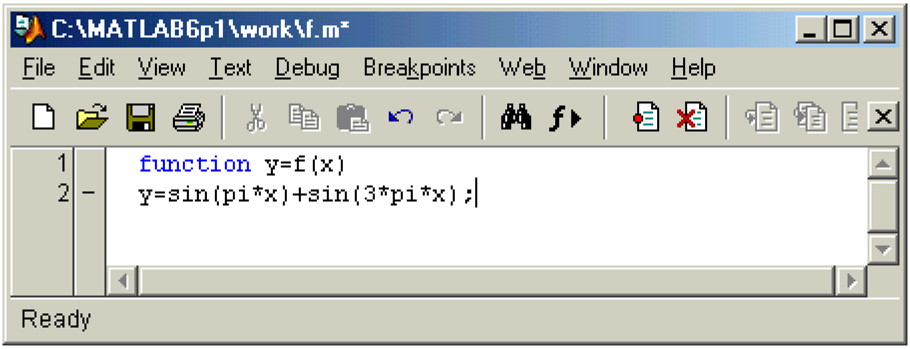
```
function  U=crnich(f,c1,c2,a,b,c,n,m)
%Input   -f=u(x,0) as astring 'f'
%        -c1=u(0,t) and c2=u(a,t)
%        -a and b right end points of [0,a] and [0,b]
%        -c the constant in the heat equation
%        -n and m number of grid points over [0,a] and [0,b]
%Output  -U solution matrix;
%Initialize parameters and U
h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c^2*k/h^2;
s1=2+2/r;
s2=2/r-2;
U=zeros(n,m);
%Boundry conditions
U(1,1:m)=c1;
U(n,1:m)=c2;
%Generate first row
U(2:n-1,1)=feval(f,h:h:(n-2)*h)‘;
%Form the diagonal and off-diagonal elements of A
%the constant vector B and solve Tridiagonal system AX=B
Vd(1,1:n)=s1*ones(1,n);
Vd(1)=1;
Vd(n)=1;
Va=-ones(1,n-1);
Va(n-1)=0;
Vc=-ones(1,n-1);
Vc(1)=0;
```

```
Vb(1)=c1;
Vb(1)=c2;
for j=2:m
    for i=2:n-1
        Vb(i)=U(i-1,j-1)+U(i+1,j-1)+s2*U(i,j-1);

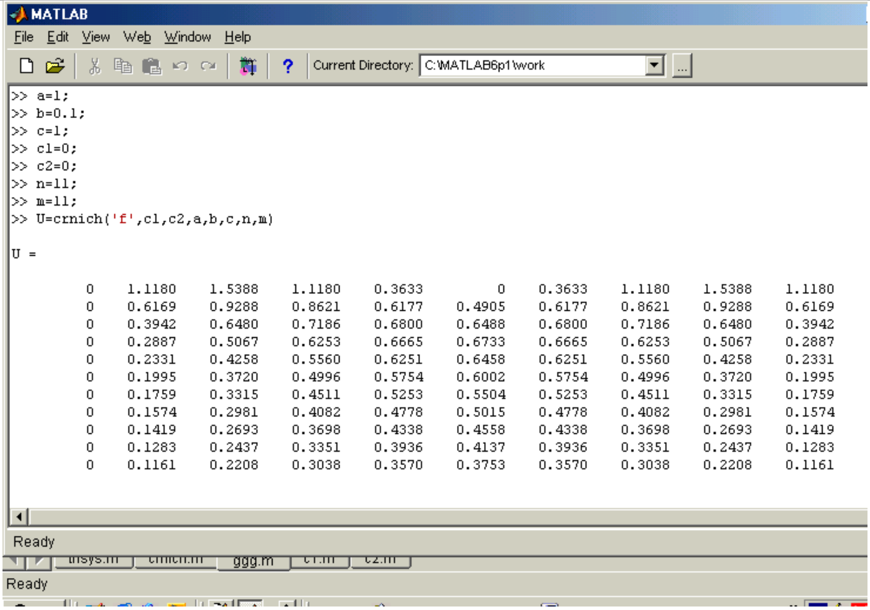


    end
    X=trisys(Va,Vd,Vc,Vb);
    U(1:n-1,j)=X';
end
U=U'
```

ولحل المثال أعلاه يجب أولاً أن نعرف الدالة بالصورة الأتية:



ومن نافذة الأوامر نكتب




```
>> a=1;
>> b=0.1;
>> c=1;
>> c1=0;
>> c2=0;
>> n=11;
>> m=11;
>> U=crnich('f',c1,c2,a,b,c,n,m)

U =

     0   1.1180   1.5388   1.1180   0.3633        0   0.3633   1.1180   1.5388   1.1180
     0   0.6169   0.9288   0.8621   0.6177   0.4905   0.6177   0.8621   0.9288   0.6169
     0   0.3942   0.6480   0.7186   0.6800   0.6488   0.6800   0.7186   0.6480   0.3942
     0   0.2887   0.5067   0.6253   0.6665   0.6733   0.6665   0.6253   0.5067   0.2887
     0   0.2331   0.4258   0.5560   0.6251   0.6458   0.6251   0.5560   0.4258   0.2331
     0   0.1995   0.3720   0.4996   0.5754   0.6002   0.5754   0.4996   0.3720   0.1995
     0   0.1759   0.3315   0.4511   0.5253   0.5504   0.5253   0.4511   0.3315   0.1759
     0   0.1574   0.2981   0.4082   0.4778   0.5015   0.4778   0.4082   0.2981   0.1574
     0   0.1419   0.2693   0.3698   0.4338   0.4558   0.4338   0.3698   0.2693   0.1419
     0   0.1283   0.2437   0.3351   0.3936   0.4137   0.3936   0.3351   0.2437   0.1283
     0   0.1161   0.2208   0.3038   0.3570   0.3753   0.3570   0.3038   0.2208   0.1161
```

7-5 إستخدام طريقة الفروقات المنتهية لحل معادلة لابلاس

Finite Difference Method Using To solve Laplace Equation

لتقريب معادلة لابلاس والتي لها الصورة الأتية

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)$$

نعوض عن المشتقات الجزئية بفروقاتها المنتهية ينتج أن

$$\nabla^2 u=\frac{u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+k)+u(x,y-k)}{h^2}+o(h^2)$$

$$\left\{x,y:\ 0\le x\le a,\ \ 0\le y\le b\ \ where\ \ b/a=m/n\ \right\}$$

إذا كان نظام صحة أو دقة $o(h^2)$ في كل نقطة الشبكة الداخلية

$$int\,erior\quad grid\quad po\,int\,s\quad (x=y)=(x_i,y_i)$$

$$for\quad i=2,3,4,........,n-1\quad and\quad j=2,3,4,........,m-1$$

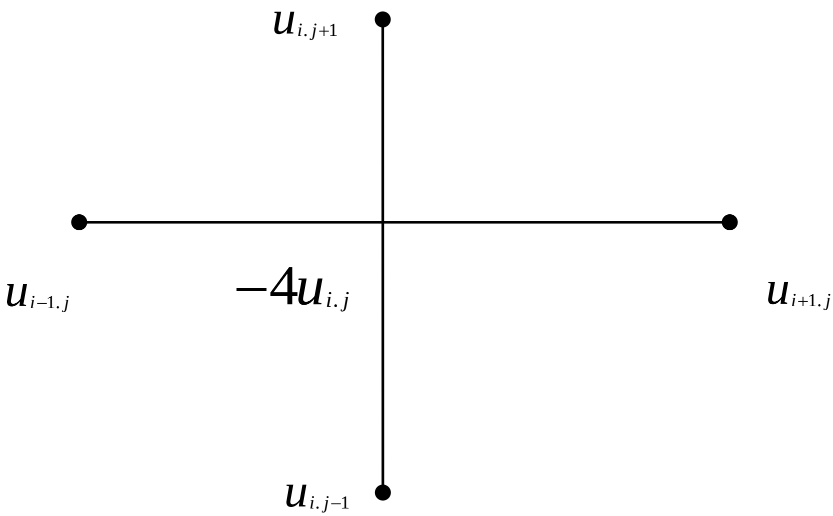
تكون المسافة بين النقاط موحدة علي نحو متشابهة:

$$x_{i+1.j} = x_{i-1} \quad , x_{i-1} = x_i - h \quad , y_{i+1} = y_i$$

نستخدم تقريباً

$$u_{i.j} \approx \frac{y_{i+1.j} + y_{i-1.j+1} + y_{i.j-1} - 4u_{i.j}}{h^2} = 0$$

والشكل أدناه يوضح ذلك



توجد هناك خمس نقاط مختلفة للمعادلة، هذه المعادلة لها علاقة بقيمة الدالة $u_{i.j}$ لأربعة قيم مجاورة

$$u_{i+1.j}, u_{i-1.j}, u_{i.j+1}, u_{i.j}$$

نستبعد الجزء h^2 من المعادلة السابقة فنحل علي معادلة لابلاس

$$u_{i+1.j} + u_{i-1.j} + u_{i.j+1} + u_{i.j-1} - 4u_{i.j} = 0$$

وبوضح $u_{i.j}$ في الطرف الإيسر وتحويل بقية الحدود الي الطرف الأيمن

$$u_{i.j}=\frac{1}{4}\left[u_{i+1.j}+u_{i-1.j}+u_{i.j+1}+u_{i.j-1}\right]$$

هذه المعادلة تتطلب ان كل قيمة $u(x,t)$ تكون متوسط أقرب أربع قيم مجاورة هنا نركز اهتمامنا علي شبكة مربعة من النقط التي تنفصل عن بعضها أفقياً وراسياً بمقدار h.

بعد ذلك نجد أن القيمة $u(x,t)$ أصبحت معرفة في:

Following boundary grid points

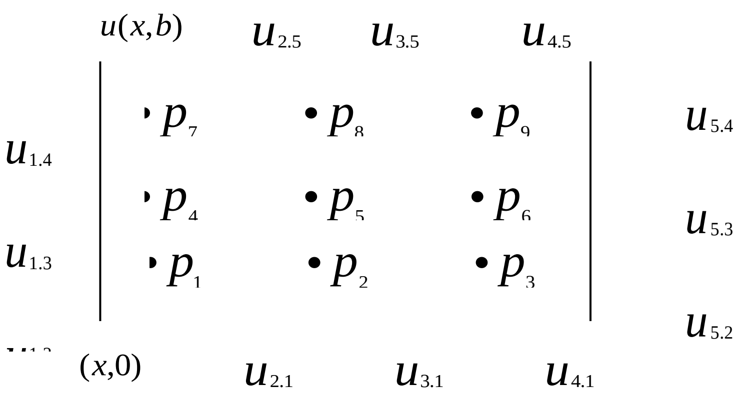
$$u(x,y_j)=u_{1.j} \quad for \quad 2\le j\le m-1 \quad \left(on \quad the \quad left\right)$$

$$u(x_i,y)=u_{i.1} \quad for \quad 2\le i\le n-1 \quad \left(one \quad the \quad bottom\right)$$

$$u(x_n,y_j)=u_{n.j} \quad for \quad 2\le j\le m-1 \quad \left(on \quad the \quad righe\right)$$

$$u(x_i,y_m)=u_{i.m} \quad for \quad 2\le i\le n-1 \quad \left(on \quad the \quad top\right)$$

في معادلة لابلاس السابقة أي نقطة داخلية في R سوف تخلق نظام خطي لـ $(n-1)$ من المعادلات تحل بأحد طرق التكرار مثل طريقة جاوس سيدل لنحصل علي $u(x,t)$ في النقاط الداخلية ، والشكل أدناه يوضح ذلك



وبتطبيق معادلة الموجة الفروقية في إي نقطة داخلية والنتيجة النظام $Ap = B$ في تسع معادلات خطية.

$$-4p_1 + p_2 \quad + p_4 \qquad\qquad = -u_2 - u_{1.2}$$

$$p_1 - 4p_2 + p_3 + \quad + p_5 \qquad\qquad = -u_{3.1}$$

$$p_2 - 4p_3 + \quad + p_6 \qquad\qquad = -u_{4.1} - u_{5.2}$$

$$-4p_4 + p_5 \quad p_7 = -u_{1.3}$$

$$p_2 + \quad p_4 - 4p_5 + p_6 + \quad + p_8 = 0$$

$$p_3 + \quad p_5 - 4p_6 \qquad\qquad + p_9 = -p_{5.3}$$

$$p_4 + \qquad -4p_7 + p_8 \qquad = -u_{2.5} - u_{1.4}$$

$$p_5 + \qquad + p_7 - 4p_8 + p_9 = -u_{3.5}$$

$$p_6 \qquad p_8 - 4p_9 = -4u_{4.5} - u_{5.4}$$

مثال:

أوجد الحل التقريبي لمعادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$ في المستطيل

$$R = \{(x, y) : 0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 4\}$$

عندما $u(x, y)$ تشير للحرارة في النقطة (x,y) والقيم الحدية هي:

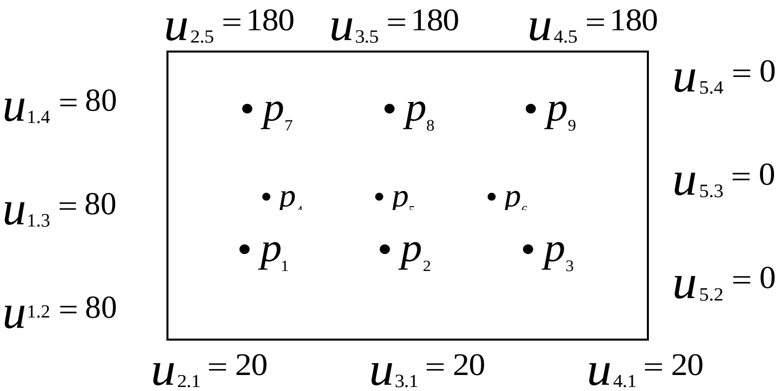
$$u(x,0) = 20 \qquad and \qquad u(x,4) = 180 \qquad for \quad 0 \le x \le 4$$

$$u(0, y) = 80 \qquad and \qquad u(4, y) = 0 \qquad for \quad 0 \le y \le 4$$

بتطبيق ذلك علي المعادلة

$$u_{i.j} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1.j} + u_{i-1.j} + u_{i.j+1} + u_{i.j-1}\right]$$

ينتج أن



$$-4p_1+p_2 \quad +p_4 \qquad = -100$$

$$p_1-4p_2+p_3+ \quad +p_5 \qquad = -20$$

$$p_2-4p_3+ \quad +p_6 \qquad = -20$$

$$-4p_4+p_5 \quad p_7 \qquad = -80$$

$$p_2+ \quad p_4-4p_5+p_6+ \quad +p_8 \qquad = 0$$

$$p_3+ \quad p_5-4p_6 \quad +p_9 \qquad = 0$$

$$p_4+ \quad -4p_7+p_8 \qquad = -260$$

$$p_5+ \quad +p_7-4p_8+p_9 \qquad = -180$$

$$p_6 \quad p_8-4p_9=-180$$

وهـذه مجموعـة مـن المعـادلات الخطيـة بإسـتخدام طريقـة جـاوس سـيدل التكرارية نجد أن الحل هو

$$p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 55.7143 & 43.2143 & 27.429 & 29.6429 & 70.0000 & 45.3571 & 111.786 & 84.2857 \end{bmatrix}.$$

باستخدام الـ Matlab

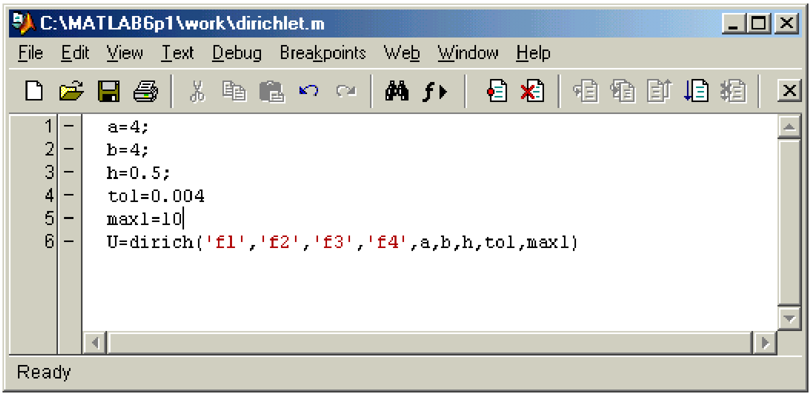
```
function U=dirich(f1,f2,f3,f4,a,b,h,tol,max1)
%Input  -f1,f2,f3,f4 are boundry functions input as astrings
%         -a and b right end points of [0,a] and [0,b[
%         -h step size
%         -tol is the tolerance
%Output -U solution matrix
%Initialize parameters and U
n=fix(a/h)+1;
m=fix(b/h)+1;
ave=(a*(feval(f1,0)+feval(f2,0))+b*(feval(f3,0)+feval(f4,0)))/(2*
a+2*b)
U=ave*ones(n,m);
%Boundry conditions
U(1,1:m)=feval(f3,0:h:(m-1)*h');
U(n,1:m)=feval(f4,0:h:(m-1)*h');
U(1:n,1)=feval(f1,0:h:(n-1)*h');
U(1:n,m)=feval(f2,0:h:(n-1)*h');
U(1,1)=(U(1,2)+U(2,1))/2;
U(1,m)=(U(1,m-1)+U(2,m))/2;
U(n,1)=(U(n-1,1)+U(n,2))/2;
U(n,m)=(U(n-1,m)+U(n,m-1))/2;
%SOR paramete
w=4/(2+sqrt(4-(cos(pi/(n-1))+cos(pi/(m-1)))^2));
%Refine approximation and sweep operator throughot
%the grid
```

```
err=1;
cnt=0;
while((err>0.0004)&(cnt<=10));
    err=0;
    for j=2:m-1
        for i=2:n-1
            relx=w*(U(i,j+1)+U(i,j-1)+U(i+1,j)+U(i-1,j)-4*U(i,j))/4;
            U(i,j)=U(i,j)+relx;
            if (err<=abs(relx));
                err=abs(relx);
            end
        end
    end
    cnt=cnt+1;
end
U=flipud(U');
```

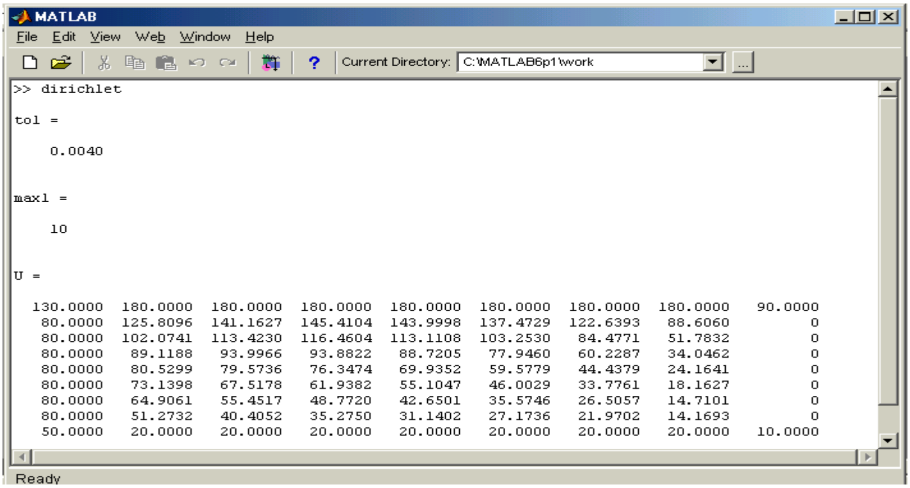
ولحل المثال المذكور

أولاً: يجب أولا أن نعرف الدوال f1,f2,f3,f4 بنفس الصورة التي كنا نعرف بها الدول.

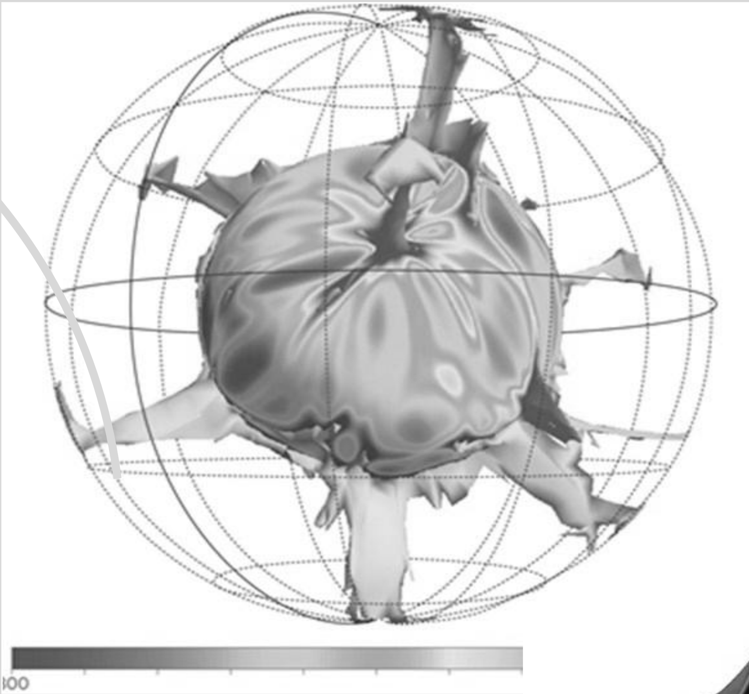
ثانياً: ننشئ script بإسم dirichlet للمدخلات بالصورة الأتية:



ثالثاً: نستدعي الـ script من نافذة الأوامر



المراجع



References : المراجع

1. Amos Gilat & Vish Subramaniam, **Numerical Methods with MATLAB** , Mar- 2010, 4th Edition
2. Timothy Sauer, **Numerical Analysis** , Nov- 2011, 2nd Edition
3. Richard L. Burden and J. Douglas Faires **, Numerical Analysis,** Sep- 2010,3rd Edition
4. William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling and Brian P. Flannery , **The Art of Scientific Computing ,** Sep- 2007, 3rd Edition.
5. Walter Gautschi **, Numerical Analysis ,**Dec -2011.
6. Anne Greenbaum and Timothy P. Chartier **, Numerical Methods: Design, Analysis, and Computer Implementation of Algorithms ,** Mar – 2012.
7. RICHARD L. BURDEN, **NUMERICAL ANALYSIS** ,2005 , 8th Edition .
8. David Kincaid and Ward Cheney , **Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing** , 2002.
9. J. Douglas Faires and Richard L. Burden, **Numerical Methods ,** Jun – 2002.

10. Jan Awrejcewicz , **Numerical Analysis: Theory and Application**, 2011.

11. James M. McDonough **, Lectures in Basic Computational Numerical Analysis** , **2001**